New

PINNACLE

1st edition

Complete Arithmetic and Advance maths

मैथ्स फार्मूला बुक

- क्लास नोट्स
- कॉन्सेप्ट्स
- फार्मूला
- शार्ट ट्रिक्स
- स्मार्ट मेथड्स
- सोल्वड उदाहरण
- एग्जाम हॉल एप्रोच
- कैलकुलेशन ट्रिक्स

हिंदी माध्यम

Useful for SSC, Railway, Banking, Police, CET, and other exams

piracy check

each book has multipurpose unique ID

Click Here To Join our Telegram Channel

PINNACLE Publications

For All Ebooks of Pinnacle Join our Telegram

INDEX

Advance Math

Click Here To Join our Telegram Channel

क्र.सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	ज्यामिति	01 - 24
2.	क्षेत्रमिति 2 D [सतह क्षेत्र और परिमाप]	25 - 34
3.	क्षेत्रमिति 3 D [आयतन]	35 - 47
4.	संख्या पद्धति	48 - 54
5.	महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य	55 - 57
6.	समान्तर श्रेणी और गुणोत्तर श्रेणी	58 - 60
7.	सरलीकरण	61 - 63
8.	बीजगणित	64 - 68
9.	घातांक और करणी	69 -71
10.	बहुपद और द्विघात समीकरण	72 - 75
11.	त्रिकोणमिति	76 - 86
12.	ऊंचाई और दूरी	87 - 91
13.	निर्देशांक ज्यामिति	92 - 95
14.	क्रमचय और संचय	96 - 97
15.	प्रायिकता	98 - 101
16.	माध्य , माध्यिका और बहुलक	102 - 104

Arithmetic

क्र.सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	अनुपात - समानुपात	105 - 111
2.	प्रतिशत	112 - 117
3.	लाभ और हानि	118 - 123
4.	छूट / बट्टा	124 - 126
5.	साझेदारी	127 - 128
6.	साधारण ब्याज	129 - 132
7.	चक्रवृद्धि ब्याज	133 - 139

8.	किश्तें (Installment)	140 - 141
9.	मिश्रण और पृथकीकरण	142 - 146
10.	औसत	147 - 150
11.	कार्य और समय	151 - 155
12.	पाइप और टंकी	156 - 160
13.	समय, चाल और दूरी	161 - 167
14.	नाव और धारा	168 - 170
15.	ट्रेन	171 - 173
16.	रेखीय / वृत्ताकार दौड़	174 - 176

Calculation Math

क्र.सं.	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
1.	वैदिक गणित	177 - 181
2.	वर्गमूल और घनमूल	182 - 184
3.	संख्या शृंखला (Number Series)	185 - 187

ज्यामिति

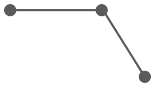
ज्यामिति के विषय

रेखा और कोण | त्रिभुज | बहुभुज | चतुर्भुज | वृत्त

रेखा

बिंदु :- बिंदु शून्य त्रिज्या वाला एक वृत्त है। इसे आमतौर पर एक बिंदु(.) द्वारा दर्शाया जाता है।

बिंदुओं का प्रकार

संरेख बिंदु	असंरेख बिंदु
जब तीन या अधिक बिंदुओं का एक समूह एक ही सीधी रेखा पर मौजूद होता है तो बिंदुओं को संरेख कहा जाता है।	बिंदु एक ही सीधी रेखा पर मौजूद नहीं हैं।
	

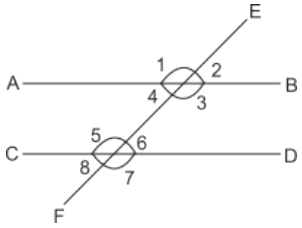
नोट :- एक बिंदु से अनंत संख्या में रेखाएँ खींची जा सकती हैं

रेखा :- रेखा एक सीधी एक-आयामी आकृति होती है जिसमें कोई मोटाई नहीं होती और यह दोनों दिशाओं में अंतहीन रूप से फैली होती है।

रेखा के प्रकार

1. समानांतर रेखाएं :- दो रेखाओं का एक युग्म जो एक ही तल पर हो और उनके बीच की दूरी बराबर हो और स्थिर रहे।
Note: ये रेखाएँ एक दूसरे को कभी प्रतिच्छेद नहीं करती है।
i.e.

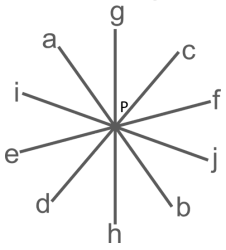
2. तिर्यक रेखाएं :- एक रेखा जो समानांतर रेखाओं को अलग-अलग बिंदु पर काटती है, जैसा कि नीचे दिए गए चित्र में दिखाया गया है।



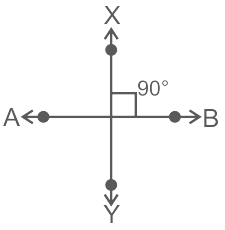
- EF तिर्यक रेखा है । AB और CD समानांतर रेखाएं हैं। 'II' समानांतर लाइनों का प्रतीक है। एक रेखा को निरूपित करने के लिए $\overline{AB}$ या AB का उपयोग किया जाता है।

3. प्रतिच्छेदी रेखाएँ :- जब दो या दो से अधिक रेखाओं के जोड़े एक ही तल पर होते हैं और एक दूसरे को एक ही बिंदु पर काटते हैं, तो उन्हें प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहा जाता है।

P प्रतिच्छेदन बिंदु है



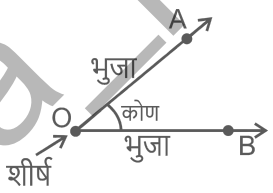
4. लंबवत रेखाएं :- जब एक ही तल पर दो रेखाएं एक-दूसरे को काटती हैं और प्रतिच्छेदन बिंदु पर 90° का कोण बनाती हैं, तो उन्हें लंबवत रेखाएं कहा जाता है।



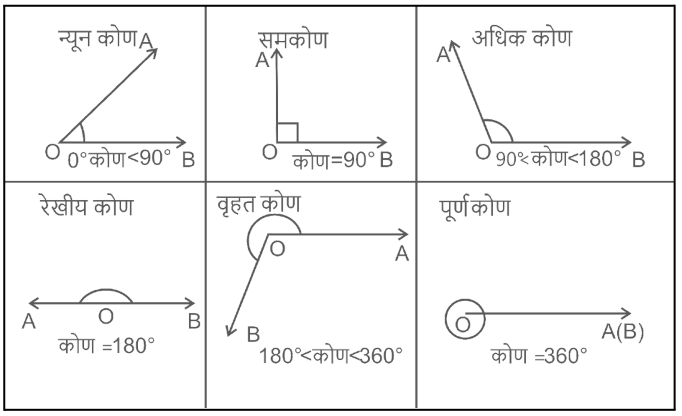
कोण

दो भुजाओं के बीच के झुकाव को कोण कहते हैं, इसे "∠" प्रतीक द्वारा दर्शाया जाता है।

कोण के भाग :-

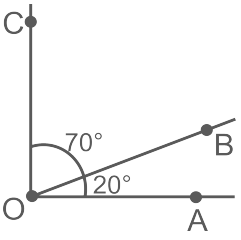


कोण के प्रकार



कोणों का युग्म

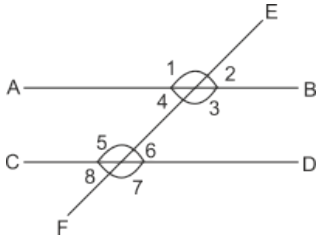
1). पूरक कोण :- दो कोणों का योग 90° के बराबर होता है।



2). संपूरक कोण :- दोनों कोणों का योग 180° के बराबर होता है।

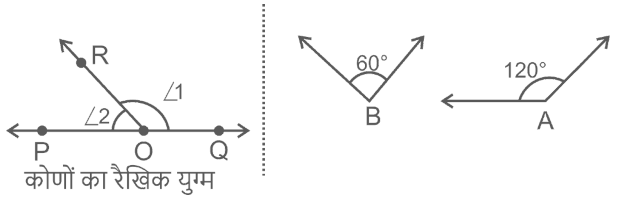
@apna_pdf

E.g. $\angle 1 + \angle 2 = 180°, \angle 4 + \angle 3 = 180°$ आदि।

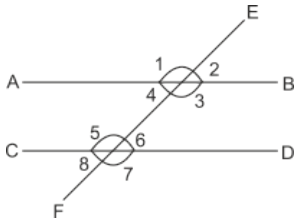


3). कोणों का रैखिक युग्म :- कोणों का एक रैखिक युग्म आसन्न कोणों का एक युग्म होता है जब दो रेखाएँ एक दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं तो यह युग्म बनता है।

कोणों का रैखिक युग्म V/S अनुपूरक कोण :-



जब एक तिर्यक रेखा दो समानांतर रेखाओं को काटती है : -



1). संगत कोण :-

$\angle 1 = \angle 5,\ \angle 2 = \angle 6, \angle 4 = \angle 8,\ \angle 3 = \angle 7$

2). एकांतर कोण :-

$(\angle 1 = \angle 7),\ (\angle 2 = \angle 8), (\angle 4 = \angle 6),\ (\angle 3 = \angle 5)$

3). शीर्षाभिमुख कोण :-

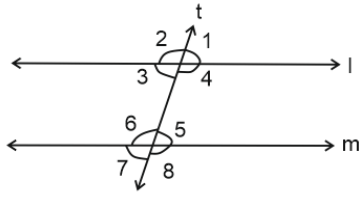
$(\angle 1 = \angle 3), (\angle 2 = \angle 4), (\angle 6 = \angle 8), (\angle 5 = \angle 7)$

4). आसन्न कोण:- $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ इस मामले में ये रैखिक युग्म हैं। यह आवश्यक नहीं है कि उनका योग 180° होना चाहिए

5). सह-आंतरिक कोण :- एक ही तरफ के आंतरिक कोणों का योग = 180° . E.g. $\angle 3 + \angle 6 = 180°$, $\angle 4 + \angle 5 = 180°$. आंतरिक कोण के समद्विभाजक द्वारा बनाया गया कोण 90° होगा।

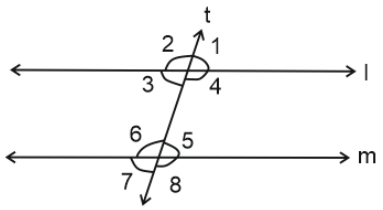
उदाहरण :- दी गई आकृति में, $l \parallel$ m है, और t एक तिर्यक रेखा है। यदि $\angle 1$ और $\angle 2$ का अनुपात 4 : 11 है , तो $\angle 7$ और $\angle 8$ के माप क्रमशः_____है।

RRC Group D 09/09/2022 (Morning)



(a) 110° और 70° (b) 87° और 93°
(c) 132° और 48° (d) 65° और 115°

हल :-



$\angle 1$ और $\angle 2$ का अनुपात = 4 : 11

$4x + 11x = 180$

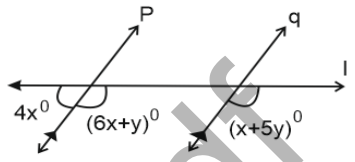
$15x = 180 \Rightarrow x = 12$

$\angle 1 = 48°$, और $\angle 2 = 132°$

$\angle 7 = \angle 3 = \angle 1 = 48°$

$\angle 8 = \angle 4 = \angle 2 = 132°$

उदाहरण :- दी गई आकृति में, p ∥ q है, और l एक तिर्यक रेखा है, जो p और q के साथ निर्दिष्ट कोण बनाते है। $(5x - y)$ का मान ज्ञात कीजिए।



RRC Group - D 06/09/2022 (Evening)

(a) 60 (b) 40 (c) 96 (d) 116

हल :- जब दो रेखाएँ समांतर होती हैं तो संगत कोण बराबर होते हैं।

इसलिए, $6x + y = x + 5y$

$5x = 4y \Rightarrow x = \frac{4y}{5}$

एक सरल रेखा पर कोणों का योग = 180°

इसलिए, $4x + 6x + y = 180°$

$10x + y = 180°$ .....(1)

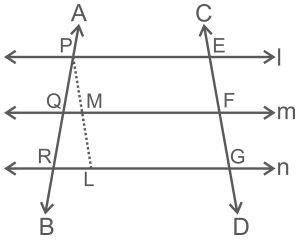
x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$8y + y = 180°$ इसलिए, $y = 20°$

और $x = \frac{4 \times 20°}{5} = 16°$

तब, $5x - y = 16° \times 5 - 20° = 60°$

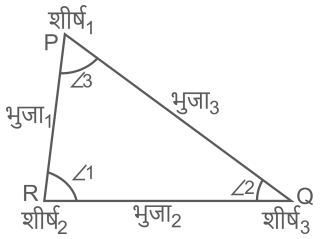
यदि तीन या अधिक समांतर रेखाएँ दो तिर्यक रेखाओं द्वारा प्रतिच्छेद की जाती हैं -



परिणाम → $\frac{PQ}{QR} = \frac{EF}{FG}$

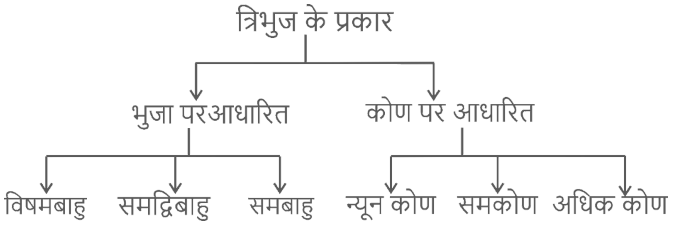
त्रिभुज

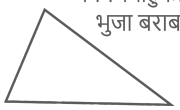
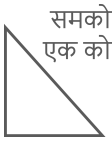
एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं।



@apna_pdf

त्रिभुजों के प्रकार



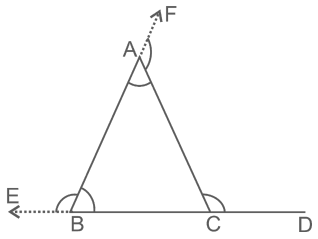
भुजा द्वारा	कोण द्वारा
विषमबाहु त्रिभुज में कोई भी भुजा बराबर नहीं होता है 	न्यूनकोण त्रिभुज के प्रत्येक कोण < 90°से कम होता है
समद्विबाहु त्रिभुज में दो भुजाएँ बराबर होती है।	समकोण त्रिभुज का एक कोण 90°होता है 
समबाहु त्रिभुज की तीनो भुजाएँ बराबर होती हैं	अधिक कोण त्रिभुज में एक कोण >90° से बड़ा होता है

उदाहरण :- एक त्रिभुज ABC में तीन कोण x, y और y + 10 हैं। साथ ही 2x – 4y = 20° है। ABC किस प्रकार का त्रिभुज है?
SSC CGL 26/07/2023 (3rd shift)
(a) समबाहु (b) अधिककोण (c) न्यूनकोण (d) समकोण
हल :- प्रश्न के अनुसार,
$x + y + (y + 10) = 180°$
$x + 2y = 170°$ .....(1)
$2x - 4y = 20° \Rightarrow x - 2y = 10°$ .....(2)
दोनों समीकरणों को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है
$x = \frac{170° + 10°}{2} = 90°$
अत: त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है।

समकोण त्रिभुज की विशेष स्थितियाँ :-

समद्विबाहु समकोण त्रिभुज	बिषमबाहु समकोण त्रिभुज
• 45° - 45° - 90° त्रिभुज	• 30° - 60° - 90 त्रिभुज
• इस त्रिभुज के कोण 1 : 1 : 2 अनुपात में होते है • इस त्रिभुज की भुजाएँ क्रमश: 1: 1 : √2 के अनुपात में होती है	• इस त्रिभुज के कोण – 1 : 2 : 3 अनुपात में होते हैं • इनके कोण की विपरीत भुजाएँ क्रमशः – 1: √3 : 2 अनुपात में होंते है

त्रिभुज के गुण



त्रिभुज के कोण योग गुण:- त्रिभुज के कोणों का योग सदैव 180° होता है।
• ∠ABC + ∠BAC + ∠ACB = 180° (कोण योग गुण)

त्रिभुज असमानता :-
(a) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है।
• AB + BC > AC
• AB + AC > BC
• BC + AC > AB

(b) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई के बीच का अंतर हमेशा तीसरी भुजा की लंबाई से कम होता है
• AB - BC < AC
• AB - AC < BC
• BC - AC < AB

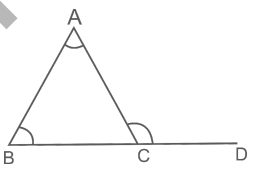
(C) माना ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजाएं a, b, c हैं।
यदि $c^2 = a^2 + b^2$, तो C पर कोण समकोण है।
यदि $c^2 < a^2 + b^2$ है, तो C पर कोण न्यून कोण है।
यदि $c^2 > a^2 + b^2$, तो C पर कोण अधिक कोण है।

कोण पक्ष असमानता :-

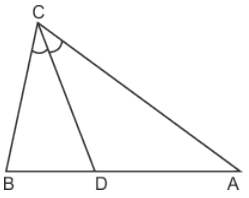
(a) त्रिभुज के सबसे बड़े कोण के विपरीत भुजा सबसे बड़ी भुजा होती है और इसके विपरीत भी।

(b) सबसे छोटे कोण के विपरीत भुजा सबसे छोटा भुजा है और इसके विपरीत भुजा ।

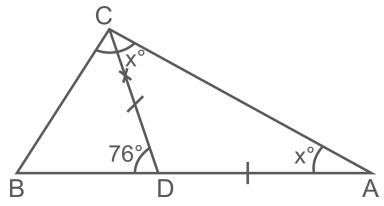
बाह्य: कोण गुण :- त्रिभुज का कोई भी बाह्य कोण उसके विपरीत आंतरिक सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है। इसे त्रिभुज का बाह्य कोण गुण कहा जाता है.
• ∠ACD = ∠ABC + ∠CAB (बाह्य कोण गुण)



उदाहरण :- दिए गए त्रिभुज में, CD ∠BCA का समद्विभाजक है। CD = DA । यदि ∠BDC = 76° है, तो ∠CBD का माप कितना होगा?



SSC CGL 01/12/2022 (4th Shift)
(a) 32° (b) 76° (c) 80° (d) 66°
हल:- एक त्रिभुज का बाह्य कोण दो विपरीत आंतरिक कोणों के योग के बराबर होता है।

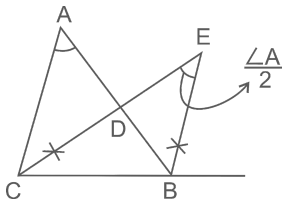


ΔCDA में
$\angle DCA = \angle DAC$ .....(DC = DA)
∠DCA + ∠DAC = 76° .....(बाहरी कोण)
x° + x° = 76° ⇒ x° = 38°
अब, $\angle DCA = \angle DCB = 38°$ ..... (CD, ∠C का कोण समद्विभाजक है)

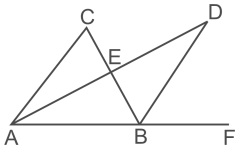
@apna_pdf

अब , ΔCBD में
$\angle DCB + \angle CBD + \angle BDC = 180°$
$38° + \angle CBD + 76° = 180° \Rightarrow \angle CBD = 66°$

- त्रिभुज ABC में, आंतरिक कोण C और बाह्य कोण B के कोण समद्विभाजक E पर मिलते हैं ∠BEC = $\frac{\angle A}{2}$



उदाहरण :- दी गयी आकृति में, AD कोण ∠CAB का समद्विभाजक है तथा BD, ∠CBF का समद्विभाजक है। यदि C पर कोण 34° है, तो ∠ADB का कोण ज्ञात कीजिए।

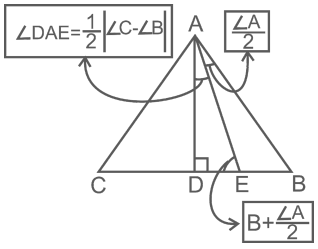


SSC CHSL 13/10/2020 (Morning)
(a) 34° (b) 32° (c) 17° (d) 16°

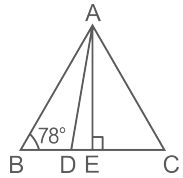
हल :- ∠ADB = $\frac{1}{2}$ ∠ACB

∠ADB = $\frac{1}{2}$ × 34° = 17°

- ΔABC में AE, ∠A का कोण समद्विभाजक तथा AD ⊥ BC तब ∠DAE = $\frac{1}{2}|\angle C - \angle B|$



उदाहरण :- ΔABC में, ∠B = 78°, AD, A का समद्विभाजक है जो BC को D पर और AE⊥BC को E पर मिलता है। यदि ∠DAE = 24° है, तो ∠ACB का माप है:
SSC CGL Tier II (29/01/2022)
(a) 32° (b) 38° (c) 30° (d) 42°
हल :-



जैसा कि हम जानते हैं,

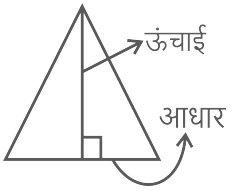
$\frac{1}{2}$ (∠ABC − ∠ACB) = ∠DAE

$\frac{1}{2}$ (78° − ∠ACB) = 24°

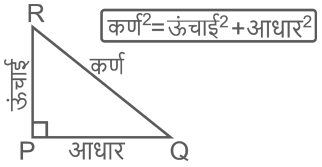
78° − ∠ACB = 48°

∠ACB = 78° − 48° = 30°

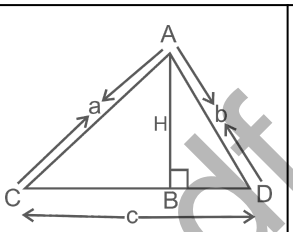
त्रिभुज की ऊँचाई और आधार :- त्रिभुज की ऊँचाई एक शीर्ष से उसकी विपरीत भुजा पर डाले गए लम्ब की लंबाई के बराबर होती है और इस भुजा को आधार माना जाता है।



पाइथागोरस प्रमेय :- समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।



त्रिभुज का क्षेत्रफल :- त्रिभुज का क्षेत्रफल 2d स्थान में त्रिभुज द्वारा घेरा हुआ क्षेत्र है।



क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

ΔABD में,

sinD = $\frac{H}{AD}$ या AD = $\frac{H}{sinD}$

सामान्य सूत्र :-

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × b × c × sinD

= $\frac{1}{2}$ × a × c × sinC

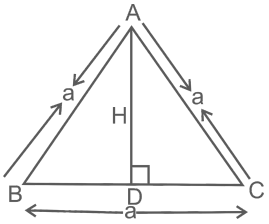
= $\frac{1}{2}$ × a × b × sinA

उदाहरण :- उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी दो भुजाओं की लंबाइयां 4 cm और 5 cm हैं, और उनके बीच का कोण 45° है।
SSC CPO 04/10/2023 (2nd Shift)
(a) $7\sqrt{2}\ cm^2$ (b) $4\sqrt{2}\ cm^2$ (c) $6\sqrt{2}\ cm^2$ (d) $5\sqrt{2}\ cm^2$
हल :- प्रश्न के अनुसार,

Sine नियम = $\frac{1}{2}$× a×b×sinθ (सूत्र का प्रयोग करके)

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

त्रिभुज के सूत्र :-



समबाहु त्रिभुज में ,

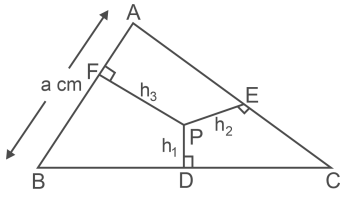
- क्षेत्रफल (A) = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)²
- अंतः त्रिज्या (r) = $\frac{\text{भुजा}}{2\sqrt{3}}$
- परित्रिज्या (R) = $\frac{\text{भुजा}}{\sqrt{3}}$
- ऊँचाई (H) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × भुजा

@apna_pdf

उदाहरण :- एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप 36 मीटर और ऊंचाई की लंबाई $6\sqrt{3}$ मीटर है। त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना है ?
RRB NTPC CBT - I 03/02/2021 (Morning)
(a) 36 $\sqrt{3}m^2$ (b) 18m^2 (c) 24m^2 (d) 12m^2
हल :- समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 36 मी
प्रत्येक भुजा = $\frac{36}{3}$ = 12 मी
त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × 12 × 12 = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 = 36$\sqrt{3}m^2$

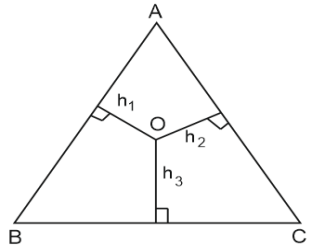
उदाहरण :- एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा 18 cm है। त्रिभुज की अंतः त्रिज्या और परित्रिज्या का अनुपात कितना है?
SSC CHSL 14/08/2023 (4th Shift)
(a) 2 : 1 (b) 3 : 2 (c) 3 : 4 (d) 1 : 2
हल :- समबाहु त्रिभुज की अंतः त्रिज्या = $\frac{\text{भुजा}}{2\sqrt{3}}$
समबाहु त्रिभुज की परित्रिज्या = $\frac{\text{भुजा}}{\sqrt{3}}$
आवश्यक अनुपात = 1 : 2

• यदि P समबाहु त्रिभुज के अंदर कोई बिंदु है, तो बिंदु P से भुजाओं AB, BC और AC पर डाले गए लम्बो का योग त्रिभुज की ऊंचाई के बराबर होता है।



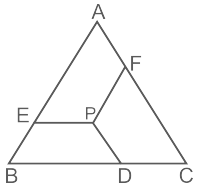
$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$a
जहां a = समबाहु त्रिभुज की भुजा

उदाहरण :- 'O' एक समबाहु त्रिभुज के अंदर एक बिंदु है। 'O' से भुजाओं की लंबवत दूरी √3cm , 2√3cm , 5√3cmहै । त्रिभुज का परिमाप___ है।
SSC CGL 13/12/2022 (4th Shift)
(a) 48 cm (b) 32 cm (c) 24 cm (d) 64 cm
हल :-



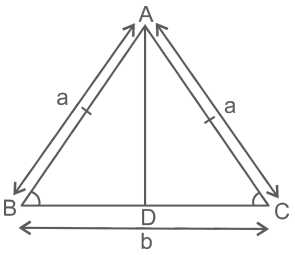
भुजा (a) = $\frac{2}{\sqrt{3}}(h_1 + h_2 + h_3)$
= $\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3})$ = 16 cm
समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × a = 48 cm

• यदि P समबाहु त्रिभुज के अंदर कोई बिंदु है, PF II AB, PD II AC, PE II CB.



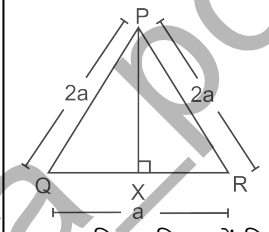
PD + PE + PF = AB = BC = CA.

समद्विबाहु त्रिभुज की स्थिति में :-



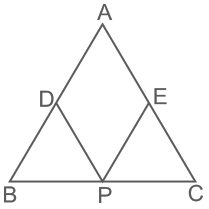
• क्षेत्रफल (A) = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$
• अंतः त्रिज्या(r) = $\frac{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{अर्धपरिमाप}}$
• परित्रिज्या (R) = $\frac{abc}{4 \times \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}$
• ऊँचाई (h) = $\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$

उदाहरण :- ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है और PQ = PR= 2a इकाई, QR = a इकाई है। PX ⊥QR खींचिए और PX की लंबाई ज्ञात कीजिए।
SSC CGL 06/12/2022 (4th Shift)
(a) $\sqrt{5}$a (b) $\frac{\sqrt{5}a}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{10}\,a}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{15}\,a}{2}$
हल :-

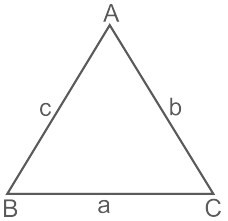


एक समद्विबाहु त्रिभुज में, विपरीत शीर्ष से आधार पर खींचा गया लंब आधार को समद्विभाजित करता है।
QX = XR = $\frac{a}{2}$
समकोण त्रिभुज PQX में,
PX = $\sqrt{(2a)^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{15a^2}{4}} = \frac{\sqrt{15}\,a}{2}$

• यदि p भुजा BC पर एक बिन्दु है और DP II AC & EP II AB है तो DP + EP = AB = AC



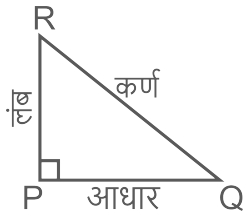
विषमकोण त्रिभुज की स्थिति में :-



अर्धपरिमाप (s) = $\frac{a+b+c}{2}$
• क्षेत्रफल (A) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

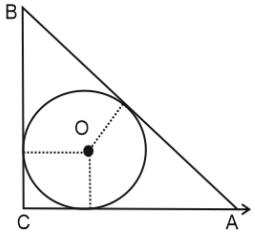
@apna_pdf

समकोण त्रिभुज की स्थिति में :-



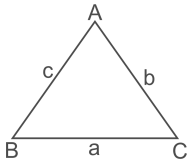
- क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}$ × लंब × आधार
- अंतः त्रिज्या(r) = $\frac{\text{लंब + आधार − कर्ण}}{2}$
- परित्रिज्या(R) = $\frac{\text{कर्ण}}{2}$

उदाहरण :- एक समकोण त्रिभुज ABC, जिसमें कोण C समकोण है, उसमें 4 cm त्रिज्या वाला एक वृत्त खींचा जाता है। यदि AC = 12 cm है, तो CB का मान ज्ञात कीजिए।



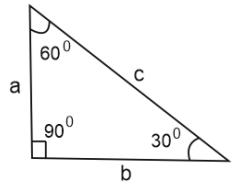
SSC CGL 25/07/2023 (4th shift)
(a) 8 cm (b) 12 cm (c) 20 cm (d) 16 cm
हल :- पाइथागोरस त्रिक :- (12 , 16 , 20)
हिट एण्ड ट्रायल विधि का प्रयोग करके ,
AC = 12 cm , BC = 16 cm और AB = 20 cm
अंतःत्रिज्या = $\frac{16 + 12 - 20}{2}$ = 4 cm ....(संतुष्ट)

ज्या का नियम (Sine rule) :-



$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$ = 2R
जहां R = त्रिभुज की परित्रिज्या

उदाहरण :- एक त्रिभुज में, यदि कोणों का अनुपात 1 : 2 : 3 है, तो संगत भुजाओं का अनुपात क्या है
Selection Post 04/08/2022 (4th Shift)
(a) 1 : 1 : 2 (b) 1 : 2 : √3 (c) 1 : √3 : 2 (d) 1 : 2 : 3
हल :- माना त्रिभुज के कोण x, 2x और 3x हैं
प्रश्नानुसार, x + 2x + 3x = 180° , 6x = 180°
x = $\frac{180}{6}$ = 30° अब , 2x = 2 × 30° = 60°
⇒ 3x = 3 × 30° = 90°.
तो, हमारे पास निम्नलिखित त्रिभुज है;



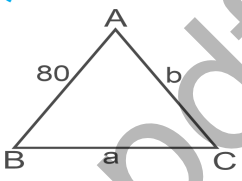
sine नियम का उपयोग करके, हमारे पास है;

$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{b}{\sin 60°} = \frac{c}{\sin 90°}$ = K
a : b : c = $\frac{1}{2}$K : $\frac{\sqrt{3}}{2}$K : K = 1 : $\sqrt{3}$: 2
तो, वांछित अनुपात = 1 : $\sqrt{3}$: 2

को - ज्या का नियम (Cosine rule) :-

CosA = $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$
CosB = $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$
CosC = $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

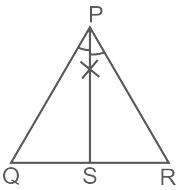
उदाहरण :- एक त्रिभुज ABC की भुजा AB 80 सेमी लंबी है जिसका परिमाप 170 सेमी है । यदि कोण ABC = 60° है, तो त्रिभुज ABC की सबसे छोटी भुजा का माप _____ सेमी होगा ।
SSC CPO 16/03/2019 (Evening)
(a) 17 (b) 15 (c) 25 (d) 21
हल :- a + b + 80 = 170



a + b = 90 ⇒ a = 90 - b
cosine नियम से,
Cos60 °= $\frac{a^2 + 80^2 - b^2}{2 \times 80 \times a}$
80(90 - b) = $(90 - b)^2 + 80^2 - b^2$
7200 - 80b = 8100 - 180b + 6400
100b = 7300 ⇒ b = 73
a = 90 - 73 = 17

कोण समद्विभाजक के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

जब आंतरिक रूप से समद्विभाजित होता है :-

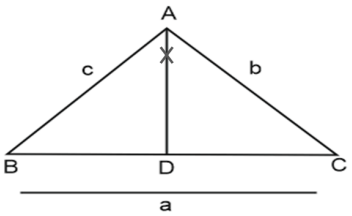


$\frac{PQ}{PR} = \frac{QS}{SR}$ या $\frac{PQ}{QS} = \frac{PR}{SR}$

यहां PS आंतरिक कोण समद्विभाजक और त्रिभुज Δ PQS और ΔPS की एक उभयनिष्ठ भुजा है।

उदाहरण :- त्रिभुज ABC में, AD जो कोण A का समद्विभाजक है, BC से D पर मिलता है । यदि BC = a, AC = b और AB = c है, तो BD - DC = ?
SSC CHSL 03/07/2019 (Afternoon)
(a) $\frac{ac}{b+c}$ (b) $\frac{a(c+b)}{c-b}$ (c) $\frac{a(c-b)}{c+b}$ (d) $\frac{ab}{b+c}$
हल :- BC = a cm
माना BD= x, DC = a-x

@apna_pdf



हम जानते हैं कि, यदि AD, ∠BAC का समद्विभाजक है, तो,

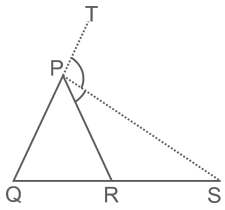
$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{x}{a-x}$

$\Rightarrow ac - cx = bx \Rightarrow x = \frac{ac}{b+c}$

$\Rightarrow DC = a - x \Rightarrow DC = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$

$BD - DC = \frac{ac}{b+c} - \frac{ab}{b+c} = \frac{a(c-b)}{c+b}$

जब बाह्य रूप से समद्विभाजित होता है :-



$\frac{PQ}{PR} = \frac{QS}{RS}$

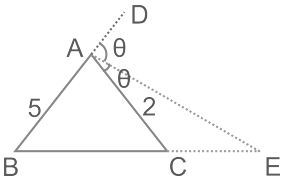
PS बाह्य कोण समद्विभाजक है।

उदाहरण :- एक त्रिभुज ABC में AB: AC = 5:2. BC = 9 सेमी। BA को D तक बढ़ाया जाता है, और कोण CAD का समद्विभाजक E पर BC से मिलता है। CE की लंबाई (सेमी में) क्या है?

SSC CGL 13/08/2021 (Afternoon)

(a) 9 (b) 10 (c) 6 (d) 3

हल :-



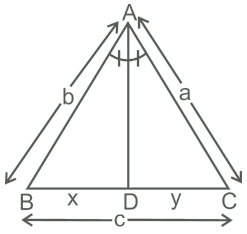
चूँकि AE कोण का समद्विभाजक है इसलिए यह सम्मुख भुजाओं को संगत भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है

इसलिए,

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{CE+9}{CE} \Rightarrow$ CE = 6 cm

कोण समद्विभाजक की लंबाई ज्ञात करने के तरीके :-

(i).



AD = ∠ A का कोण समद्विभाजक

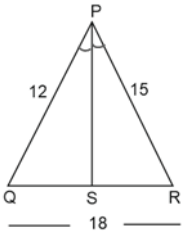
$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$

उदाहरण :- △PQR के ∠QPR का समद्विभाजक, भुजा QR को S पर मिलता है। यदि PQ = 12 सेमी, PR = 15 सेमी और QR = 18 सेमी है, तो SR और PS की लंबाई है:-

NTPC CBT II (14/06/2022) 2nd Shift

(a) 10, 10 (b) 12, 5 (c) 8, 7 (d) 13, 15

हल :-



कोण द्विभाजक प्रमेय द्वारा, $\frac{PQ}{QS} = \frac{PR}{SR}$

$\frac{12}{x} = \frac{15}{18-x}$

216 - 12x = 15x

27x = 216 ⇒ x = 8

अत: SR की लंबाई = 18 - 8 = 10 सेमी

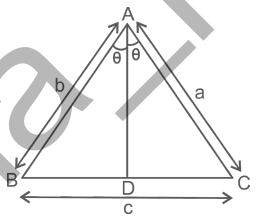
समद्विभाजक की लंबाई →

PS^2 = PQ × PR - QS × SR

= 12 × 15 - 8 × 10 ⇒ PS^2 = 180 - 80

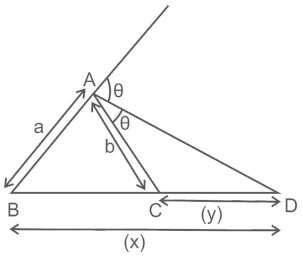
⇒ PS = $\sqrt{100}$ ⇒ PS = 10 सेमी

(ii).



कोण समद्विभाजक की लंबाई(AD) = $\frac{2ab.cos\theta}{a+b}$

(iii).



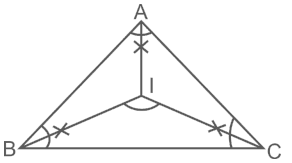
AD = ∠ A का कोण समद्विभाजक

AD^2 = BD × DC - AB × AC

त्रिभुज के केंद्र

अंत: केंद्र (r): किसी त्रिभुज के कोण के समद्विभाजक का प्रतिच्छेदन बिंदु।

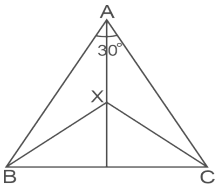
1.



$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$, $\angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$ $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$

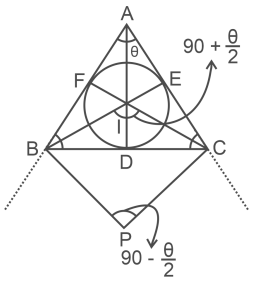
@apna_pdf

उदाहरण :- ΔABC में, ∠ABC और ∠ACB के आंतरिक समद्विभाजक X पर मिलते हैं और ∠BAC = 30° है। ∠BXC की माप क्या है?
SSC CHSL 03/08/2023 (4th Shift)
(a) 120° (b) 115° (c) 105° (d) 150°
हल :-

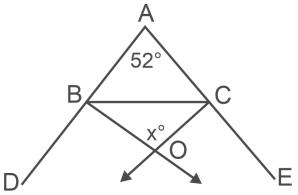


हम जानते हैं:-
∠BXC = 90° + $\frac{\angle BAC}{2}$ = 90° + 15° = 105°

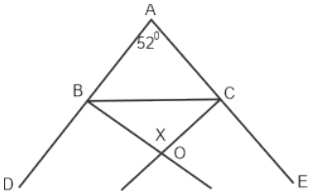
2.



उदाहरण :-



उपरोक्त आकृति में, BO और CO क्रमशः $\angle DBC$ और $\angle BCE$ के कोणीय समद्विभाजक हैं। x का माप _____ है।
RRB NTPC 01/04/2021 (Evening)
(a) 52° (b) 58° (c) 64° (d) 54°
हल :-



दिया गया है ,∠BAC = 52°, BO और CO, ∠DBC और ∠BCE के कोण समद्विभाजक हैं
अब, ∠X = (90° - $\frac{52°}{2}$)
= (90° - 26°) ⇒ 64°

3. अंतः त्रिज्या (r) :

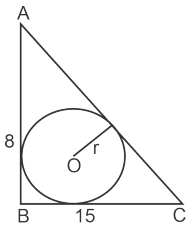
- किसी भी प्रकार के त्रिभुज के लिए :

r = $\frac{A}{S}$, (जहां A = त्रिभुज का क्षेत्रफल , S = त्रिभुज का अर्ध - परिमाप)

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

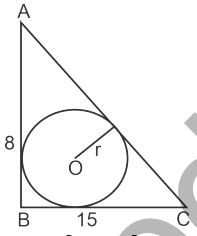
उदाहरण :- एक त्रिभुज ABC में, समकोण B पर है, BC=15 सेंटीमीटर और AB=8 सेंटीमीटर है। यदि त्रिभुज ABC का परिवृत्त बनाया गया है, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
RRB ALP 13/08/2018 (Evening)
(a) 2 सेंटीमीटर (b) 4 सेंटीमीटर (c) 3 सेंटीमीटर (d) 1 सेंटीमीटर
हल :-

प्रश्न के अनुसार,



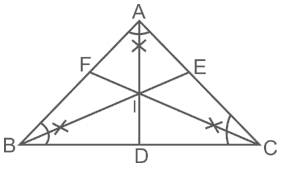
त्रिक (8, 15, 17) का उपयोग करके = AC = 17 सेंटीमीटर
⇒ S = $\frac{AB+BC+AC}{2}$ = $\frac{8+15+17}{2}$ = $\frac{40}{2}$ = 20 सेंटीमीटर
अब,
वृत्त की अंत:त्रिज्या (r) = $\frac{A}{S}$
= $\frac{\frac{1}{2}\times 8\times 15}{20}$ = $\frac{4\times 15}{20}$ = 3 सेंटीमीटर

Exam hall approach :-



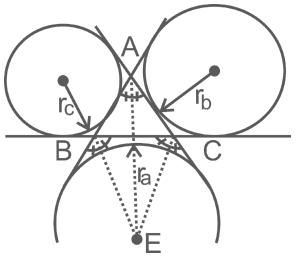
पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:
AC = $\sqrt{15^2+8^2}$ = $\sqrt{289}$ = 17 सेंटीमीटर
आंतरिक त्रिज्या = $\frac{AB+BC-AC}{2}$
= $\frac{15+8-17}{2}$ = $\frac{6}{2}$ = 3 सेंटीमीटर

अवधारणा :- अंतकेंद्र प्रत्येक कोण के समद्विभाजक को दो आसन्न भुजाओं के योग और विपरीत भुजाओं की लंबाई के अनुपात में विभाजित करता है।



AI : ID = AB + AC : BC
BI : IE = AB + BC : AC
CI : IF = AC + BC : AB

बाह्यकेंद्र :- एक कोण के आंतरिक कोण के समद्विभाजक और अन्य दो विपरीत बाह्य कोणों के समद्विभाजक का प्रतिच्छेदन बिंदु।

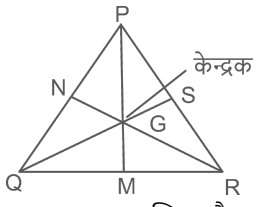


(i). ∠BEC = 90° - $\frac{\angle A}{2}$

(ii). r_a = $\frac{\Delta}{s-a}$, r_b = $\frac{\Delta}{s-b}$, r_c = $\frac{\Delta}{s-c}$; जहां S त्रिभुज का अर्धपरिमाप है

केन्द्रक (G) :- यह त्रिभुज की सभी माध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु है। इसे द्रव्यमान का केंद्र भी कहा जाता है।

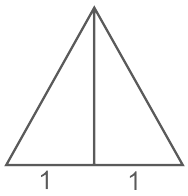
@apna_pdf



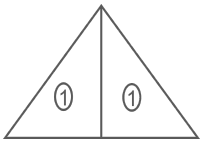
PM, QS, RN माध्यिका है ।

माध्यिकाओं के गुण :-

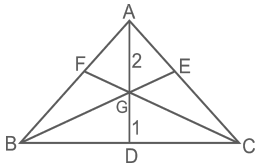
a). माध्यिका किसी भी भुजा को दो बराबर भागों में विभाजित करती है ।



b). माध्यिका किसी भी त्रिभुज को दो बराबर क्षेत्रफलो में विभाजित करती है ।

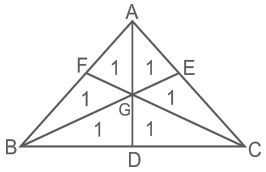


c). केन्द्रक किसी भी माध्यिका को 2 : 1 विभाजित करती है।

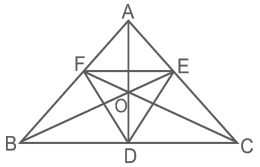


AG : GD = BG : GE =CG : FG = 2 : 1

d). माध्यिका किसी भी त्रिभुज को 6 बराबर क्षेत्रफलो में विभाजित करती है



e). दो भुजाओं और केन्द्रक के मध्य बिंदुओं को मिलाने से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल त्रिभुज के क्षेत्रफल का $\frac{1}{12}$ है।



क्षे. ΔOFE = क्षे.Δ OFD = क्षे.ΔOED = $\frac{1}{12}$ ΔABC का क्षेत्रफल

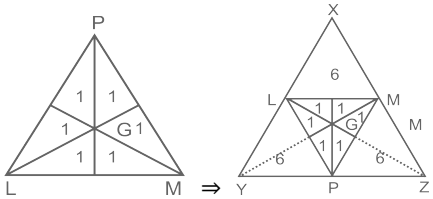
उदाहरण :- XYZ एक त्रिभुज है। यदि माध्यिका ZL और YM एक-दूसरे को G पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो (ΔGLM का क्षेत्रफल : ΔXYZ का क्षेत्रफल) ज्ञात कीजिए।

SSC CHSL 12/10/2020 (Afternoon)

(a) 1 : 14 (b) 1 : 12 (c) 1 : 11 (d) 1 : 10

हल :-

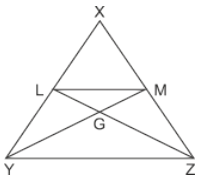
माध्यिका त्रिभुज को दो बराबर भागों में विभाजित करती है।



△ GLM का क्षेत्रफल : △ XYZ का क्षेत्रफल

= 2 : 24 = 1 : 12

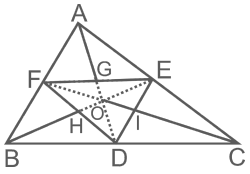
Exam hall approach :-



हम जानते है कि ,

ΔGLM का क्षेत्रफल : ΔXYZ का क्षेत्रफल = 1 : 12

f). दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड, रेखा के बीच के शीर्ष को जोड़ने वाली रेखा को केन्द्रक से 3:1 के अनुपात में विभाजित करता है।



AG : GO = BH : HO = CI : IO = 3 : 1

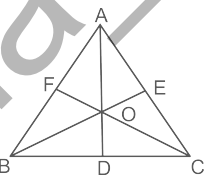
माध्यिकाओं से बने त्रिभुजों का क्षेत्रफल

g) माध्यिकाओं से बने त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= \frac{4}{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$S = \frac{\text{माध्यिकाओं का योग}}{2}$

h). त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा के सन्दर्भ में माध्यिका के दोगुने से अधिक होता है।



AB + AC > 2AD

BC + AC > 2CF

AB + BC > 2BE

इसलिए हम कह सकते है त्रिभुज के परिमाप का योग माध्यिकाओं के योग से अधिक होता है।

AB + BC + AC > AD + BE + CF

और

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

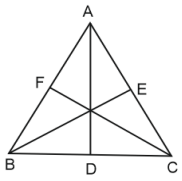
उदाहरण :- त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें D, E और F क्रमशः भुजाओं BC, AC और AB पर स्थित ऐसे बिंदु हैं कि AD⊥BC, BE⊥AC आर CF⊥ AB है । निम्न में से कौन सा सही है ?

SSC CPO 11/12/2019 (Morning)

(a) $7AB^2 = 9AD^2$ (b) $2AB^2 = 3AD^2$

(c) $4AC^2 = 5BE^2$ (d) $3AC^2 = 4BE^2$

हल :-



चूँकि, ABC एक समबाहु त्रिभुज है

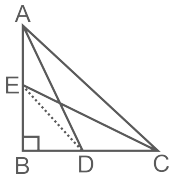
ऊँचाई = कोण समद्विभाजक = माध्यिका

हम जानते हैं कि एक समबाहु त्रिभुज की स्थिति में निम्नलिखित संबंध संतुष्ट होते हैं।

@apna_pdf

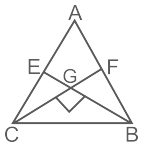
3[$AB^2 + BC^2 + AC^2$] =
4[$AD^2 + BE^2 + CF^2$] .....समी॰ 1
⇒ AB = BC = AC(ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है)
मानों को समीकरण 1 में रखने पर,
3[3 AC^2] = 4[3 BE^2] ⇒ $3AC^2 = 4BE^2$

i).



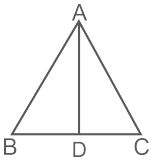
$4(AD^2 + CE^2) = 5(AC^2)$
$(AD^2 + CE^2) = (AC^2 + ED^2)$
$(AD^2 + CE^2) = 5(ED^2)$

j). यदि दो माध्यिकाएँ 90° पर समद्विभाजित होती हैं



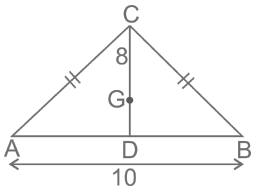
$(AC^2 + AB^2) = 5(BC^2)$

k). अपोलोनियस प्रमेय (माध्यिका की लंबाई ज्ञात करने के लिए)



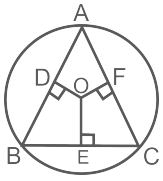
- $(AB^2 + AC^2) = 2(AD^2 + DC^2)$
- $(AB^2 + AC^2) = 2(AD^2 + \frac{BC^2}{4})$

उदाहरण :- ΔABC में, AC = BC है, और आधार AB की लंबाई 10 सेमी है। यदि CG = 8 सेमी, जहां G केन्द्रक है, तो AC की लंबाई (सेमी में) क्या है?
SSC CHSL 12/08/2021 (Evening)
(a) 13 (b) 15 (c) $\sqrt{91}$ (d) 12
हल :-



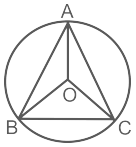
AC = BC
G केंद्रक है इसलिए GD = 4 सेमी
इसलिए CD = 8 + 4 = 12 सेमी
अपोलोनियस प्रमेय द्वारा,
$(AC^2 + BC^2) = 2(CD^2 + AD^2)$
$2AC^2 = 2(5^2 + 12^2) \Rightarrow AC^2 = 13^2 \Rightarrow AC = 13Cm$

परिकेन्द्र(O) : भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक का प्रतिच्छेदन बिंदु।
i).



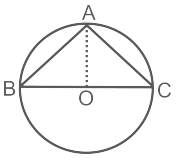
OD ⊥ AB, OF ⊥ AC, OE ⊥ BC
AD = BD, AF = CF, BE = EC

ii).



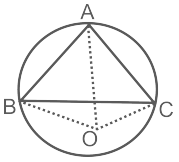
∠BOC = 2∠A, ∠AOB = 2∠C, ∠AOC = 2 ∠B

iii).



∠BOC = 2∠A, ∠AOB = 2∠C, ∠AOC = 2 ∠B

iv). एक अधिककोण त्रिभुज में,



∠BOC = 2(180 -∠A) , ∠COA = 2∠B और ∠BOA = 2∠C

विभिन्न त्रिभुजों में परिकेन्द्र की स्थिति :-

(i). न्यूनकोण त्रिभुज में यह त्रिभुज के अंदर स्थित होता है।

(ii). समकोण त्रिभुज में यह कर्ण का मध्यबिंदु होता है।

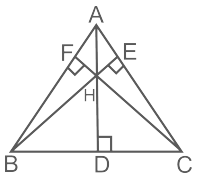
(iii). एक अधिक कोण त्रिभुज में, यह उस त्रिभुज के अधिक कोण के बाहर और सामने स्थित होता है।

परित्रिज्या (R) :-

- किसी प्रकार के त्रिभुज के लिए
  R = $\frac{abc}{4 \times \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}$ जहाँ a,b,c त्रिभुज की भुजाएँ हैं
- समकोण त्रिभुज के लिए
  R = $\frac{H}{2}$ जहां H = कर्ण
- समबाहु त्रिभुज के लिए
  R = $\frac{a}{\sqrt{3}}$ जहां a = भुजा
- किसी भी त्रिभुज के परिकेन्द्र और अन्तःकेन्द्र के बीच की दूरी
  = $\sqrt{R^2 - 2Rr}$

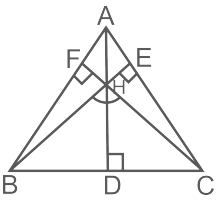
उदाहरण :- एक त्रिभुज की परित्रिज्या 9 सेमी है जबकि इसकी अंत:त्रिज्या 4 सेमी है। त्रिभुज के परिकेन्द्र और केन्द्र के बीच की दूरी कितनी है?
RRB NTPC 27/03/2021 (Evening)
(a) 4 cm (b) 2 cm (c) 3 cm (d) 5 cm
हल :- दिया गया है, त्रिभुज की परित्रिज्या (R) = 9 सेमी
तथा त्रिभुज की अंतःत्रिज्या (r) = 4 सेमी
त्रिभुज के परिकेन्द्र और केन्द्र के बीच की दूरी
= $\sqrt{R^2 - 2Rr} = \sqrt{9^2 - 2 \times 9 \times 4}$ = 3 cm

लम्बकेन्द्र (H) :- एक त्रिभुज की ऊंचाईयों का प्रतिच्छेदन बिंदु।



@anna_pdf

महत्वपूर्ण परिणाम :-



(i). $\angle BHC = 180^\circ - \angle A$, $\angle BHA = 180^\circ - \angle C$, $\angle CHA = 180^\circ - \angle B$

(ii). $BH \times EH = FH \times HC$,

$BF \times EH = FH \times CE$

$BF \times HC = HB \times CE$ (ΔBFH & Δ CEH की समरूपता से)

(iii). $BD \times DC = AD \times AH$

$BE \times EH = AE \times CE$

$CF \times FH = AF \times BF$

(iv). किसी भी त्रिभुज का परिमाप त्रिभुज की ऊंचाईयों के योग से अधिक होता है।

$AB + BC + AC > AD + BE + CF$

विभिन्न त्रिभुजों में लंबकेन्द्र की स्थिति :-

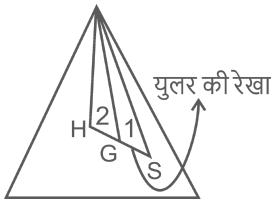
(i) न्यूनकोण त्रिभुज में यह त्रिभुज के अंदर स्थित होता है।

(ii) समकोण त्रिभुज में यह समकोण त्रिभुज के शीर्ष पर होता है।

(iii) किसी अधिककोण त्रिभुज में, यह उस त्रिभुज के अधिक कोण के बाहर और पीछे की ओर स्थित होता है।

यूलर की रेखा :- यूलर के सिद्धांत के अनुसार, एक त्रिभुज में, एक सीधी रेखा मौजूद होती है जिसे यूलर की रेखा कहा जाता है, जो त्रिभुज के लम्बकेंद्र, परिकेंद्र और केन्द्रक से होकर गुजरती है। इसलिए, त्रिभुज के ये दिए गए समवर्ती बिंदु त्रिभुज में संरेख बिंदु हैं।

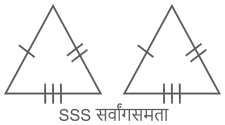
लंबकेन्द्र(O), केन्द्रक (G) और परिकेंद्र(H) के बीच संबंध



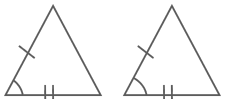
त्रिभुज की सर्वांगसमता

दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यदि:

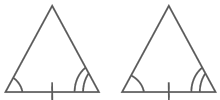
1. SSS: (Side – Side – Side नियम) :- जब तीनों संगत भुजाएँ बराबर हों।


SSS सर्वांगसमता

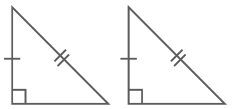
2. SAS: (Side – Angle – Side नियम): जब दो संगत भुजाएँ और एक संगत कोण बराबर हों।


SAS सर्वांगसमता

3. ASA: (Angle – Side – Angle नियम): जब दो संगत कोण और एक संगत भुजा बराबर हो।


ASA सर्वांगसमता

4. RHS: (Right angle – Hypotenuse – Side rule):- जब समकोण त्रिभुज की एक संगत भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज के बराबर होते हैं।


RHS सर्वांगसमता

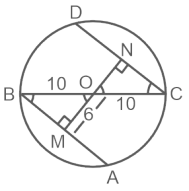
5. AAS: (angle – angle – Side rule) :- जब दो संगत कोण और संगत भुजाऐं बराबर हों।

उदाहरण : - 20 cm व्यास के एक वृत्त में, जीवा AB और CD एक दूसरे के समानांतर हैं। BC व्यास है। यदि AB वृत्त के केंद्र से 6 cm दूर है, तो जीवा CD की लम्बाई(cm में) क्या है?

SSC CGL 13/04/2022 (Morning)

(a) 8 (b) 12 (c) 20 (d)16

हल :-



त्रिज्या = $\frac{20}{2}$ = 10 cm.

जैसे AB∥CD , $\angle MBO = \angle NCO$ और

$\angle BOM = \angle CON$ (शीर्षाभिमुख कोण)

BO = CO = 10 (त्रिज्या)

इसलिए, ASA सर्वांगसमता द्वारा Δ BOM ≅ Δ CON

अब, CPCT ("सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग")

द्वारा,

ON = OM = 6 cm

और $\angle OMB = \angle ONC = 90^\circ$

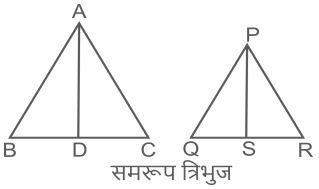
NC = $\sqrt{10^2 - 6^2}$ = 8 cm

CD = 2 × NC = 16 cm

त्रिभुज की समरूपता

1). यदि दो त्रिभुज समान हों तो वे समरूप होते हैं
लेकिन यह त्रिभुज आकार में भिन्न हो सकते है ।

2). सर्वांगसमता में त्रिभुज एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब होते हैं।अतः हम कह सकते हैं कि सभी सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते हैं लेकिन इसका विपरीत सत्य नहीं है।



समरूप त्रिभुज

3). समरूप त्रिभुजों के महत्वपूर्ण गुण :

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AD^2}{PS^2}$$

$$\frac{\Delta ABC \text{ का परिमाप}}{\Delta PQR \text{ का परिमाप}} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PS}$$

उदाहरण : - ΔABC में, AC = 8.4 सेमी, BC = 14 सेमी है । P, AB पर स्थित एक ऐसा बिंदु है कि CP = 11.2 सेमी तथा $\angle ACP = \angle B$ है । BP की लंबाई (सेमी में) कितनी है ?

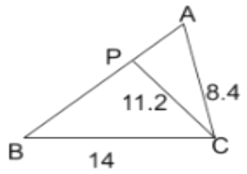
SSC CGL 04/03/2020 (Evening)

(a) 4.12 (b) 2.8 (c) 3.78 (d) 3.6

हल : -

ΔABC, में, $\angle ACP = \angle B$

@apna_pdf

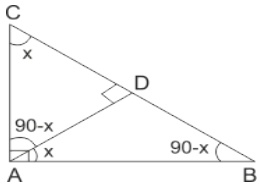


ΔABC तथा ΔACP में,:
∠ACP = ∠B,
∠A और भुजा AC उभयनिष्ठ है
अतः, $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{AP}$

$\Rightarrow \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow \frac{14}{11.2} = \frac{8.4}{AP} \Rightarrow$ AP = 6.72

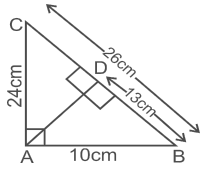
इसी तरह, $\Delta ABC \sim \Delta CBP$
AB × PC = AC × BC
AB × 11.2 = 8.4 × 14
AB = 10.5
BP = 10.5 - 6.72 = 3.78 cm

4). जब समकोण त्रिभुज में एक लम्ब खींचा जाता है



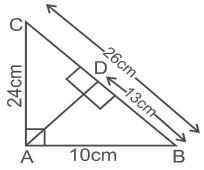
- $AD^2 = BD \times DC$
- $AB^2 = BD \times BC$
- $AC^2 = CD \times BC$
- $AD = \frac{AC \times AB}{BC}$

उदाहरण :- ΔCAB में, ∠CAB = 90° और AD ⊥ BC है। यदि AC = 24 cm, AB = 10 cm है, तो AD का मान (cm में) ज्ञात कीजिए।
SSC CHSL 17/08/2023 (1st Shift)
(a) 9.23 (b) 8.23 (c) 7.14 (d) 10.23
हल :-
प्रश्न के अनुसार,



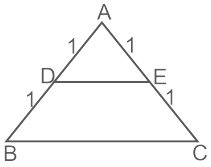
त्रिक (10, 24, 26) का उपयोग करने पर = CB = 26 cm
तो, = $\frac{AC \times AB}{BC} = \frac{24 \times 10}{26}$ = 9.23 cm

Exam Hall approach :-



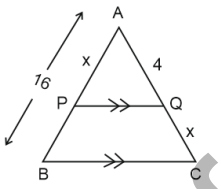
ΔCAB और ΔADB समरूप है
$\frac{26}{10} = \frac{24}{AD} \Rightarrow$ AD = $\frac{240}{26}$ = 9.23 cm

[1.] आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय :- एक भुजा के समानांतर खींची गई रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।



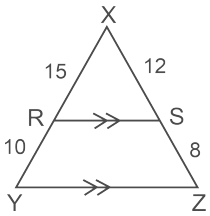
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ और $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

उदाहरण :- ΔABC में, भुजा BC के समानांतर सीधी रेखा AB और AC से क्रमशः बिंदु P और Q पर मिलती है। यदि AP = QC है, AB की लंबाई 16 cm है और AQ की लंबाई 4 cm है, तो CQ की लंबाई (cm में) कितनी है?
SSC CHSL 02/08/2023 (2nd Shift)
(a) $\left(2\sqrt{21} + 2\right)$ (b) $\left(2\sqrt{18} - 2\right)$
(c) $\left(2\sqrt{17} - 2\right)$ (d) $\left(2\sqrt{19} + 2\right)$
हल :-



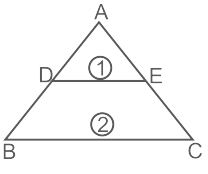
थेल्स प्रमेय का उपयोग करके,
$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{4}{x+4}$
$= x^2 + 4x - 64 = 0$
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4 \times 1 \times (-64)}}{2 \times 1}$
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{272}}{2 \times 1} = \left(2\sqrt{17} - 2\right)$

उदाहरण :- R और S क्रमशः ΔXYZ की भुजाओं XY और XZ के बिंदु हैं। साथ ही, XR = 15 cm, XY = 25 cm, XS = 12 cm और XZ = 20 cm है। RS _____ के बराबर है
Selection Post 27/06/2023 (4th Shift)
(a) $\frac{2}{5}$ YZ (b) $\frac{5}{3}$YZ (c) $\frac{3}{5}$YZ (d) $\frac{3}{4}$ YZ
हल :-



$\frac{XR}{XY} = \frac{XS}{XZ} \Rightarrow \frac{15}{25} = \frac{12}{20} \Rightarrow \frac{3}{5}$
तो, RS ∥ YZ और $\Delta XRS \sim \Delta XYZ$
थेल्स प्रमेय का उपयोग करते हुए,
$\frac{XR}{XY} = \frac{RS}{YZ} = \frac{15}{25} \Rightarrow \frac{RS}{YZ} = \frac{3}{5} \Rightarrow RS = \frac{3}{5} \times YZ$

[2.] मध्य बिंदु प्रमेय: किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समानांतर और आधा होता है।



$DE = \frac{BC}{2}$
DE II BC.

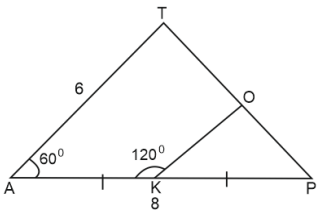
@apna_pdf

उदाहरण :- ΔTAP में, ∠TAP = 60°, TA = 6 cm, AP = 8cm है. K, AP का मध्यबिंदु है। K से एक रेखा TP से O पर इस प्रकार मिलने के लिए बढ़ाई जाती है कि ∠AKO = 120° है। OK की लंबाई ज्ञात कीजिए।

Graduate Level 01/08/2022 (Shift - 4)

(a) 3 cm (b) 4 cm (c) 5 cm (d) 6 cm

हल :-



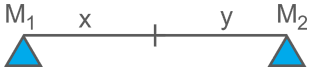
चूंकि , ∠TAP + ∠OKA = 60° + 120° = 180° (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के आंतरिक कोणों का युग्म संपूरक होता है)

इसलिए , OK ∥ AT और K, AP का मध्य बिंदु है

⇒ OK = $\frac{AT}{2}$ ....(मध्य बिंदु प्रमेय)

इसलिए , OK = $\frac{6}{2}$ = 3 cm

द्रव्यमान बिंदु प्रमेय :-



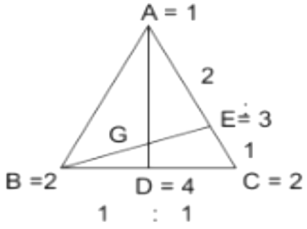
$M_1X = M_2Y \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{Y}{X}$

उदाहरण :- D, ΔABC के भुजा BC का मध्यबिंदु है। बिंदु E, AC पर इस प्रकार है कि CE = $\frac{1}{3}$AC है । BE और AD एक-दूसरे को G पर प्रतिच्छेद करते हैं । $\frac{AG}{GD}$ क्या है ?

SSC CGL 05/03/2020 (Morning)

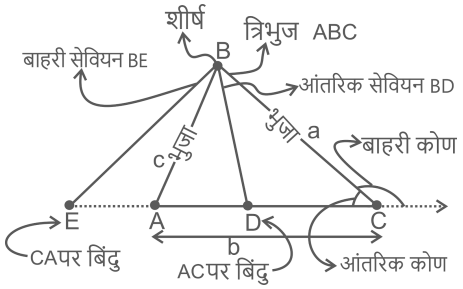
(a) 8 : 3 (b) 4 : 1 (c) 5 : 2 (d) 3 : 1

हल :- निम्नलिखित चित्र में mass point प्रमेय लागू करें:

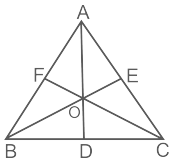


AG : GD = 4 : 1

सेवियन :- एक रेखा खंड जो त्रिभुज के एक शीर्ष को त्रिभुज के विपरीत दिशा में एक बिंदु से जोड़ता है।



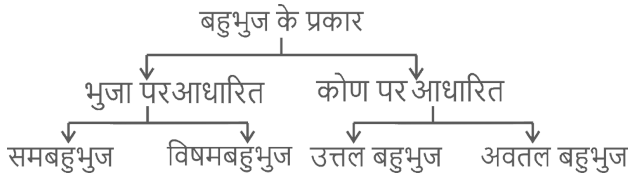
कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :-



$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$

बहुभुज

एक द्वि-आयामी बंद आकृति जो न्यूनतम तीन भुजाओं से घिरी हुई है। त्रिभुज बहुभुज का सबसे सरल रूप है।



भुजा द्वारा	कोण द्वारा
नियमित बहुभुज - बहुभुज की सभी भुजाएँ और आंतरिक कोण बराबर होते हैं।	अवतल बहुभुज - एक आंतरिक कोण 180 से अधिक होना चाहिए.
अनियमित बहुभुज - ऐसे बहुभुज जिनकी भुजाएँ समान न हों और कोण भी समान न हों।	उत्तल बहुभुज - जिसके सभी आंतरिक कोण 180 से कम हों।

बहुभुज के प्रकार

त्रिभुज • इसमें 3 भुजाएँ और 3 शीर्ष हैं • इसमें कोई विकर्ण नहीं है • आंतरिक कोणों का योग 180° होता है	चतुर्भुज • इसमें 4 भुजाएँ और 4 शीर्ष हैं • इसमें दो विकर्ण हैं • आंतरिक कोणों का योग 360° होता है
पंचभुज • इसमें 5 भुजाएँ और 5 शीर्ष हैं • इसमें 5 विकर्ण हैं • आंतरिक कोणों का योग 540° है	षट्भुज • इसमें 6 भुजाएँ और 6 शीर्ष हैं • इसमें 9 विकर्ण हैं • आंतरिक कोणों का योग 720° होता है
सप्तभुज • इसमें 7 भुजाएँ और 7 शीर्ष हैं • इसमें 14 विकर्ण हैं • आंतरिक कोणों का योग 900° होता है	अष्टभुज • इसमें 8 भुजाएँ और 8 शीर्ष हैं • इसमें 20 विकर्ण हैं • आंतरिक कोणों का योग 1080° होता है क्षेत्रफल = $2a^2(1+\sqrt{2})$
नवभुज • इसमें 9 भुजाएँ और 9 शीर्ष हैं • इसमें 27 विकर्ण हैं • आंतरिक कोणों का योग 1260° होता है	दसभुज • इसमें 10 भुजाएँ और 10 शीर्ष हैं • इसमें 35 विकर्ण हैं। • आंतरिक कोणों का योग 1440° है

बहुभुज के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

n = भुजाओं की संख्या

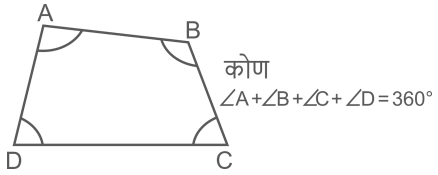
तब,

@apna.pdf

* सभी बाह्य कोणों का योग = 360°.
* प्रत्येक बाह्य कोण = $\frac{360°}{n}$.
* बाह्य कोण + आंतरिक कोण = 180°
* उत्तल बहुभुज (convex polygon) की स्थित में, सभी आंतरिक कोण का योग = $(2n - 4) \times 90°$
* विकर्णों की संख्या= $\frac{n(n-3)}{2}$
* नियमित बहुभुज का क्षेत्रफल = $\frac{na^2}{4} \cot\frac{\pi}{n}$
* अंतःत्रिज्या = $\frac{a}{2} \cot\frac{\pi}{n}$
* परित्रिज्या = $\frac{a}{2} \text{cosec}\frac{\pi}{n}$

चतुर्भुज

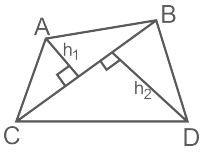
चार भुजाओं, चार शीर्षों और चार कोणों वाली एक द्वि-आयामी आकृति ।



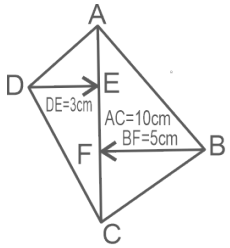
उदाहरण :- यदि एक चतुर्भुज के कोणों का अनुपात 4 : 9 : 11 : 12 है, तो इनमें से सबसे बड़ा कोण कौन सा है ?
RRB NTPC CBT - I 29/01/2021 (Evening)
(a) 168° (b) 72° (c) 166° (d) 120°
हल :- चतुर्भुज के कोणों का योग = 360°
$4x + 9x + 11x + 12x = 360°$
$36x = 360° \Rightarrow x = 10°$
सबसे बड़ा कोण (12x) = 120°

चतुर्भुज का क्षेत्रफल

(i). चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्ण I × (h_1 + h_2)

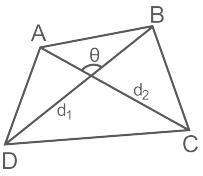


उदाहरण :- दिए गए चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल (सेमी^{2} में) ज्ञात कीजिए।

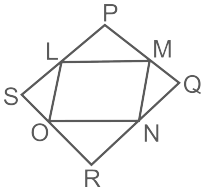


SSC CHSL 31/05/2022 (Afternoon)
(a) 50 (b) 35 (c) 45 (d) 40
हल :-
चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$×AC(DE+ BF)
= $\frac{1}{2}$ × 10 × (3 + 5) = 5 × 8 = 40 cm^2

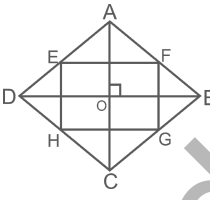
(ii). चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × d_1 × d_2 × sin(θ)



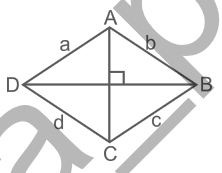
(iii). चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा एक समांतर चतुर्भुज बनाती है।
जहां L, M, N, O PS, PQ, QR और RS के मध्य बिंदु हैं।



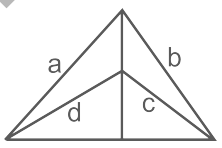
(iv). जब चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं के मध्य बिंदुओं को जोड़ा जाता है और इसका विकर्ण 90 पर प्रतिच्छेद करता है तो एक आयत बनता है।



चतुर्भुज के विशेष परिणाम :-

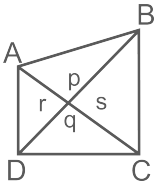


$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

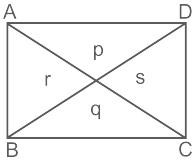


$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

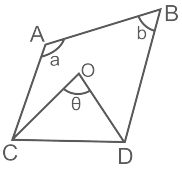
- यदि p, q, r और s संबंधित त्रिभुजों का क्षेत्रफल हों
  P × q = r × s



- यदि ABCD एक आयत/वर्ग है, तो
- क्षेत्र.(P) + क्षेत्र.(q) = क्षेत्र.(r) + क्षेत्र.(s)

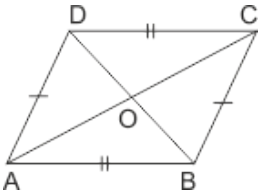


- यदि DO और CO ∠ADC और ∠BCD के कोण समद्विभाजक हैं, तो, ∠ DOC = $\frac{a+b}{2}$



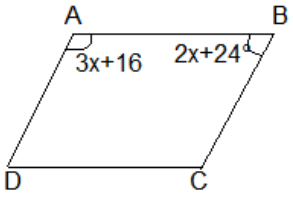
@apna_pdf

1). समांतर चतुर्भुज : समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ और कोण बराबर होते हैं।



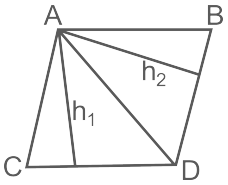
- AB = DC और AD = BC
- $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$

उदाहरण :- समांतर चतुर्भुज ABCD में, यदि m∠A = (3x + 16)° और m∠B = (2x + 24)°,है तो m∠C ज्ञात कीजिए।
RRC Group D 30/09/2022 (Evening)
(a) 56° (b) 28° (c) 100° (d) 110°
हल :-

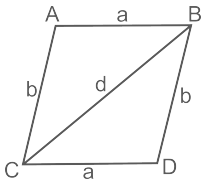


हम जानते हैं,
समांतर चतुर्भुज में, आसन्न कोणों का योग= 180°
3x + 16° + 2x + 24° = 180°
5x + 40° = 180°
5x = 140°
x = 28°
∠A = 3x + 16° = 3 × 28 + 16 = 100°
∠A = ∠C = 100°(समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

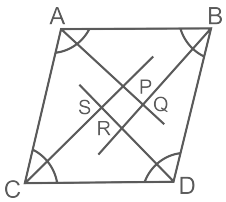
- $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$
- विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, अर्थात AO = OC और OB = OD
- समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई



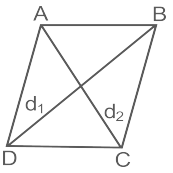
- समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $2\sqrt{s\ (s\ -\ a)(s\ -\ b)(s\ -\ c)}$
- S = $\frac{a+b+c}{2}$



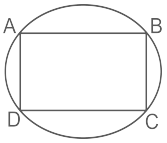
- एक समांतर चतुर्भुज (ABCD) के समद्विभाजक एक आयत (PQRS) बनाते हैं।



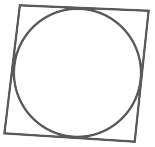
- चारों भुजाओं के वर्गों का योग = विकर्णों के वर्गों का योग।
- $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$



- एक वृत्त में अंकित समांतर चतुर्भुज एक आयत है।

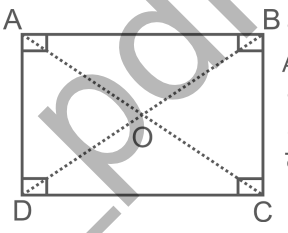


- एक वृत्त को परिचालित करने वाला समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है।



- वर्ग, आयत और समचतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हैं।
- सभी आयत समांतर चतुर्भुज हैं लेकिन सभी समांतर चतुर्भुज आयत नहीं हैं.

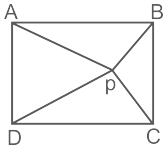
आयत



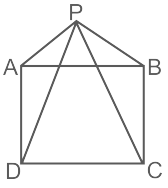
- $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$
- विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं i.e, OA = OC , OB = OD
- सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं i.e, AB = DC , AD = BC.
- क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई
- परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई)

उदाहरण :- एक आयत की दो असमान भुजाओं का अनुपात 3 : 4 है। यदि परिमाप 42 सेमी है, तो विकर्ण की लंबाई होगी:
RRB NTPC CBT - I 02/02/2021 (Morning)
(a) 30 cm (b) 25 cm (c) 15 cm (d) 35 cm
हल :- आयत का परिमाप
= 2 × (3 + 4) = 14 इकाई
14 इकाई = 42 cm
1 इकाई = 3 cm
भुजाएँ 9 सेमी और 12 सेमी हैं
आयत का विकर्ण = $\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15\ cm$

- यदि p आयत के अंदर कोई बिंदु है।
  $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$

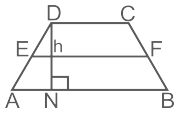


- यदि p आयत के बाहर कोई बिंदु है।
  $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$



@apna_pdf

2). समलम्ब चतुर्भुज : विपरीत भुजाओं का एक जोड़ा समानांतर होता है।



समलंब ABCD का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ समांतर भुजा का योग $\times$ ऊँचाई

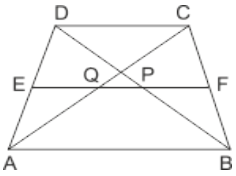
$= \frac{1}{2} \times (AB + DC) \times h$

उदाहरण :- एक समलंब चतुर्भुज की समानांतर भुजाओं के एक युग्म की लंबाई क्रमशः 20 cm और 25 cm है, और इन दोनों भुजाओ के बीच की लंबवत दूरी 14 cm है। समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल (cm^2 में) ज्ञात करें?
SSC CHSL 02/06/2022 (Afternoon)
(a) 512 (b) 250 (c) 300 (d) 315

हल :- समलंब का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (समांतर भुजा का योग) × उनके बीच की दूरी

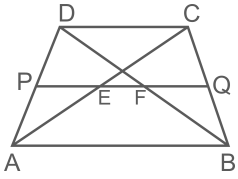
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times (20 + 25) \times 14 = \frac{1}{2} \times 45 \times 14 = 315\ cm^2$

- यदि E, AD का मध्यबिंदु है और F, BC का मध्यबिंदु है, तो
  EF = $\frac{AB + DC}{2}$.
- यदि P, विकर्ण BD का मध्यबिंदु है और Q, विकर्ण AC का मध्यबिंदु है, तो
  PQ = $\frac{AB - DC}{2}$



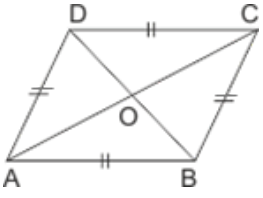
उदाहरण :- ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AB ∥ DC है। E और F क्रमशः विकर्ण AC और BD के मध्यबिंदु हैं। यदि AB = 18 सेमी और CD = 6 सेमी है, तो EF = ?
SSC CGL TIER 2 (29/01/2022)
(a) 8 (b) 9 (c) 6 (d) 12

हल :-



EF = $\frac{AB - DC}{2}$ = $\frac{18 - 6}{2}$ = $\frac{12}{2}$ = 6सेमी

3). समचतुर्भुज : सभी भुजाएँ समान होती हैं और विपरीत भुजाएँ एक दूसरे के समानांतर होती हैं।



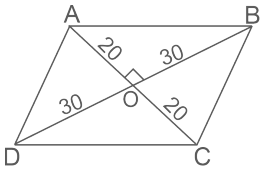
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$

- $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$
- $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$

अर्थात, वर्ग के भुजाओं का योग = वर्ग के विकर्णों का योग।

उदाहरण :- किसी समचतुर्भुज के विकर्णों की लंबाई 40 cm और सेमी cm है। इस समचतुर्भुज की भुजा की लंबाई कितनी है ?
SSC CHSL 13/03/2023 (4th Shift)
(a) $50\sqrt{3}$ cm (b) $20\sqrt{3}$ cm (c) $10\sqrt{13}$ cm (d) $40\sqrt{13}$ cm

हल :-



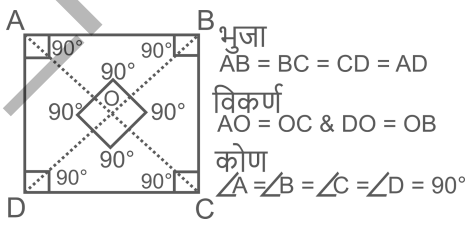
विकर्ण की लंबाई 40 cm और 60 cm है
फिर, ΔAOB में

AB = $\sqrt{(20)^2 + (30)^2} = \sqrt{1300}$
= $10\sqrt{13}$ cm

अतः समचतुर्भुज की भुजा = $10\sqrt{13}$ cm

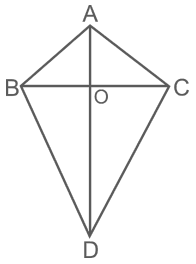
- विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और समान क्षेत्रफल वाले चार समकोण त्रिभुज बनाते हैं।
  ⇒ ΔAOB का क्षेत्रफल = ΔBOC का क्षेत्रफल = ΔCOD का क्षेत्रफल
  $= \Delta DOA$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}$ × समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल
- समचतुर्भुज के विकर्णों की लंबाई समान नहीं है.

4). वर्ग:- सभी भुजाएँ लंबाई में समान होती हैं और आसन्न भुजाएँ एक दूसरे के लंबवत होती हैं।



- AB = BC = CD = AD और $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$
- विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और चार समकोण समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं।
- विकर्ण समान लंबाई के होते हैं **i.e.** AC = BD

5). पतंग :-

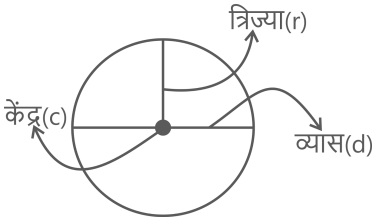


- आसन्न भुजाओं की लंबाई बराबर है। i.e, AB = AC , BD = DC
- विकर्ण AD विकर्ण BC को समद्विभाजित करता है लेकिन विकर्ण BC, विकर्ण AD को समद्विभाजित नहीं करता है **i.e,** BO = 0C
- इसमें विपरीत कोणों (जो अधिक कोण हैं) का एक जोड़ा बराबर होता है। यहाँ, ∠B = ∠C
- विकर्ण 90° पर कटते हैं
- परिमाप = 2 (a + b)
- क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

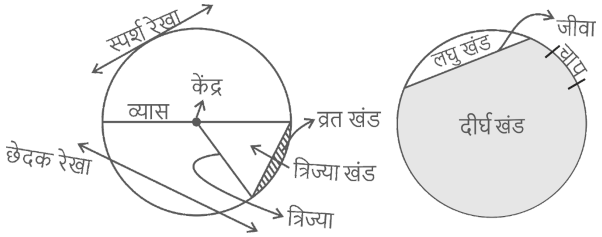
वृत्त

वृत्त एक द्वि-आयामी आकृति है जो बिंदुओं के एक समूह द्वारा बनाई गई है जो समतल पर एक निश्चित बिंदु (केंद्र) से एक निश्चित दूरी (त्रिज्या) पर हैं।

@apna_pdf



वृत्त के भाग :-



महत्वपूर्ण सूत्र :-

1). वृत्त की परिधि = $2\pi r$,

2). वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

3). चाप की लंबाई(l) = $2\pi r \times \frac{\theta}{360}$.....(θ डिग्री में)

चाप की लंबाई(l) = r × θ .....(θ रेडियन)

रेडियन को डिग्री में बदलें = θ रेडियन मे × $\frac{180^\circ}{\pi}$

उदाहरण :- 14 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त में, एक चाप केंद्र पर 90° का कोण अंतरित करता है। चाप की लंबाई (cm में) _____ के बराबर है।

($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

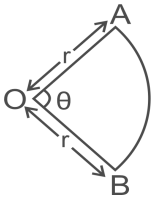
SSC CHSL 02/08/2023 (3rd Shift)

(a) 22 (b) 18 (c) 20 (d) 24

हल :- चाप की लंबाई = $\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

= $\frac{90^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = 22$ cm

त्रिज्यखंड :-



1). त्रिज्यखंड का परिमाप = $[2r + \frac{\theta}{360} \times (2\pi r)]$

2). त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल= $\pi r^2 \times \frac{\theta}{360}$ .....(θडिग्री में)

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times l \times r$ ....(l चाप की लंबाई है और r त्रिज्या है)

उदाहरण :- एक वृत्त के वृत्त खंड का क्षेत्रफल A है जिसका केंद्रीय कोण 60° है । इस वृत्त की परिधि C है । A किसके बराबर है ?

SSC CHSL 10/07/2019 (Evening)

(a) $\frac{c^2}{6\pi}$ (b) $\frac{c^2}{18\pi}$ (c) $\frac{c^2}{24\pi}$ (d) $\frac{c^2}{4\pi}$

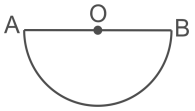
हल :- हम जानते हैं ,

वृत्त की परिधि (C) = $2\pi r \Rightarrow r = \frac{c}{2\pi}$

वृत्तखंड का क्षेत्रफल (A) = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$\Rightarrow A = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times \frac{c}{2\pi} \times \frac{c}{2\pi} = \frac{c^2}{24\pi}$

अर्धवृत्त :-

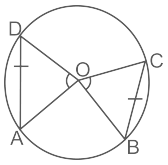


व्यास = 2 × त्रिज्या, परिमाप = (π + 2)r, क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2}{2}$

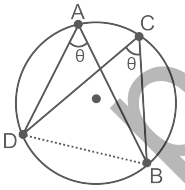
वृत्तों के गुण

1). वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं।

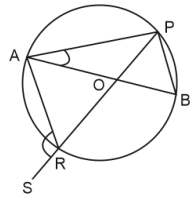
यदि AD = BC तो , ∠ AOD = ∠COB



2). वृत्त के एक ही खंड में कोण बराबर होते हैं।



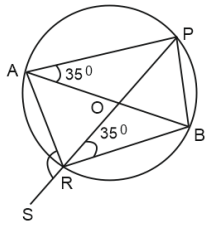
उदाहरण :- दी गई आकृति में O वृत का केंद्र है। यदि $\angle PAB = 35^\circ$, तो ∠ARS का मान ज्ञात कीजिये।



RRB NTPC 11/01/2021 (Evening)

(a) 125° (b) 55° (c) 65° (d) 115°

हल :-

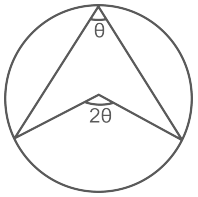


∠PRB = 35° (एक ही जीवा द्वारा बनाया गया कोण) ∠ARB = 90° (व्यास से बना कोण)

∠ARP = 90 - 35 = 55°

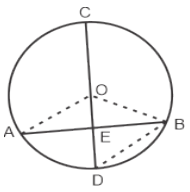
∠ARS = 180 - 55 = 125°

3). एक चाप द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण वृत्त की परिधि के किसी भी बिंदु पर इसके द्वारा बनाए गए कोण का दोगुना होता है।



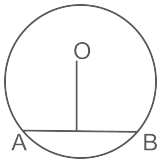
@apna_pdf

उदाहरण :- केंद्र O वाले वृत्त में, जीवा AB और व्यास CD वृत्त के अंदर बिंदु E पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं। यदि ∠AOD = 42° और ∠BOC = 104° है, तो ∠AED का माप (डिग्री में) क्या है?
SSC CHSL 04/08/2021 (Evening)
(a) 73° (b) 62° (c) 58° (d) 84°
हल :-

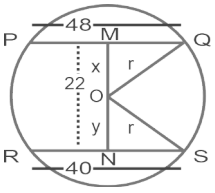


∠AOD = 42°, ∠BOC = 104°
∠ABD = $\frac{1}{2}$∠AOD (एक चाप द्वारा परिधि पर अंतरित कोण केंद्र पर अंतरित कोण का आधा होता है।)
∠ABD = 21°, ∠BDC = $\frac{1}{2}$∠BOC = 52°
∠AED = ∠ABD+∠BDC = 73° (बाहरी कोण प्रमेय)

4). एक वृत्त के केंद्र से एक जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।



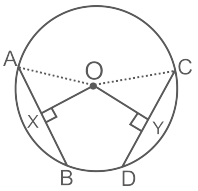
उदाहरण :- PQ और RS एक वृत्त की दो समानांतर जीवाएं हैं, ये इस प्रकार हैं कि PQ, 48 cm और RS, 40 cm है। यदि जीवाएं केंद्र की विपरीत दिशा में हैं और उनके बीच की दूरी 22 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या (cm में) ज्ञात करें।
SSC CPO 09/11/2022 (Afternoon)
(a) 25 (b) 24 (c) 35 (d) 22
हल :-



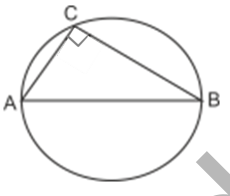
दी गई आकृति से,
MQ = $\frac{48}{2}$ = 24 सेमी
और NS = $\frac{40}{2}$ = 20 सेमी
x + y = 22 ---------- (1)
△MOQ में, हमारे पास है:
$r^2 = x^2 + 24^2$ ---------- (2)
△NOS में, हमारे पास है:
$r^2 = y^2 + 20^2$ ---------- (3)
समीकरण (2) और (3) से, हमारे पास है:
$x^2 + 24^2 = y^2 + 20^2 \Rightarrow x^2 + 576 = y^2 + 400$
$\Rightarrow x^2 - y^2 = -176 \Rightarrow (x - y)(x + y) = -176$
(x - y)22 = -176 (समीकरण (1) से)
x - y = - 8 ---------- (4)
अब, समीकरण (1) और (4) से, हम पाते हैं:
x = 7 और y = 15
अब समीकरण (2) में x = 7 रखने पर, हम पाते हैं:
r = $\sqrt{49 + 576}$ = 25 सेमी
Exam hall approach :-

पाइथागोरस त्रिक →
(15 , 20 , **25**) और (7 , 24 , **25**)
20 सेमी और 24 सेमी वृत्त की दी गई जीवाएँ हैं।
जीवा के बीच की दूरी = (15+7) = 22 सेमी
दी गई शर्तें संतुष्ट हैं।
स्पष्टतः , वृत्त की त्रिज्या = 25 सेमी

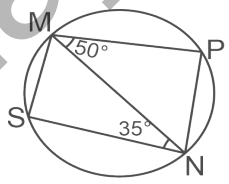
5). वृत्त के केंद्र से समान दूरी पर स्थित जीवाओं की लंबाई बराबर होती है।



6). व्यास को आधार मानकर किसी वृत्त की परिधि पर बनाया गया कोण सदैव समकोण होता है।

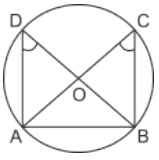


उदाहरण :- MN, केंद्र O वाले एक वृत्त का व्यास है । P और S, MN के दोनों ओर वृत्त की परिधि पर दो बिंदु इस प्रकार स्थित हैं कि ∠PMN = 50° और ∠MNS = 35° है। ∠PMS और ∠ PNS के बीच के अंतर की डिग्री की माप क्या होगी ?
SSC CHSL 04/08/2023 (3rd Shift)
(a) 25° (b) 55° (c) 65° (d) 30°
हल :-

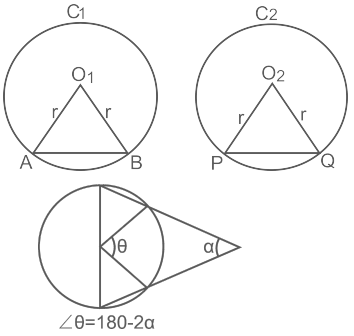


$\angle SMN$ = 180° − (90° + 35°) = 55°
$\angle MNP$ = 180° − (90° + 50°) = 40°
अब , $\angle PMS - \angle PNS$ = (55° + 50°) − (40° + 35°) = 30°

7). समान आधार से एक वृत्त के एक ही क्षेत्र में कोण हमेशा समान होते हैं।

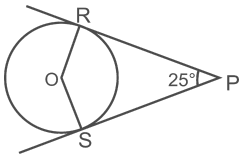


8). दो समान वृत्तों की समान जीवाएँ अपने केन्द्रों पर समान कोण बनाती हैं और इसके विपरीत भी सत्य है ।
यदि AB = PQ तो , ∠ AOB = ∠POQ
यदि ∠ AOB = ∠POQ तो , AB = PQ

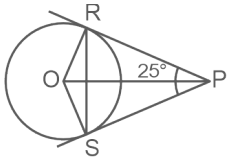


@apna_pdf

उदाहरण :- दी गई आकृति में, यदि ∠RPS = 25° है,
तो ∠ROS का मान क्या है।



SSC CHSL 27/05/2022 (Afternoon)
(a) 155° (b) 145° (c) 135° (d) 165°
हल :-

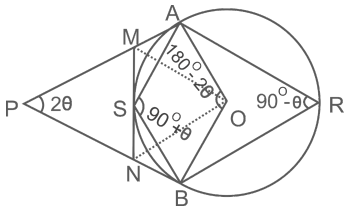


$\angle ORS = \angle OSR = \frac{25°}{2}$

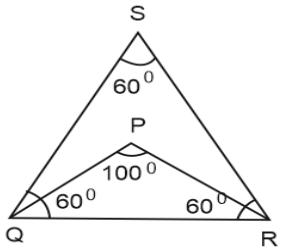
△ORS में,

$\angle ROS = 180° - (\frac{25°}{2} + \frac{25°}{2}) = 180° - 25° = 155°$

9). PA और PB दो स्पर्शरेखाएँ हैं, O वृत्त का केंद्र है और R और S वृत्त पर बिंदु हैं, तो

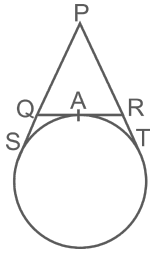


उदाहरण :- ΔPQR और ΔSQR दोनों एक उभयनिष्ठ आधार QR पर समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि P और S, QR की एक ही दिशा में स्थित हैं। यदि ∠QSR = 60° और ∠QPR = 100° है, तो ∠SRP का मान ज्ञात कीजिए।
SSC CHSL 03/08/2023 (1st Shift)
(a) 80° (b) 60° (c) 100° (d) 20°
हल :-



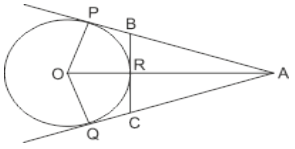
QS = SR
So , ∠PQR = ∠PRQ = 40°
PQ = PR
इसलिए , ∠SQR = ∠SRQ = 60°
अब , ∠SRP = 60° − 40° = 20°

10). एक वृत्त बाहरी रूप से PQR की भुजा QR को A पर स्पर्श करता है, PQ S पर और PR T पर बढ़ता है। फिर PQR का परिमाप ?



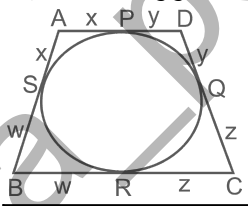
ΔPQR का परिमाप = 2 × PS

उदाहरण :- त्रिज्या 10 सेमी के वृत्त के केंद्र O से 26 सेमी की दूरी पर A एक बिंदु है। AP और AQ बिंदु P और Q पर स्पर्शरेखा हैं। यदि AP को B पर और AQ को C पर प्रतिच्छेद करने के लिए लघु चाप PQ पर स्थित बिंदु R पर एक स्पर्शरेखा BC खींची जाती है, तो ABC की परिधि है:
SSC CHSL 20/10/2020 (Morning)
(a) 40 cm (b) 48 cm (c) 46 cm (d) 42 cm
हल :-



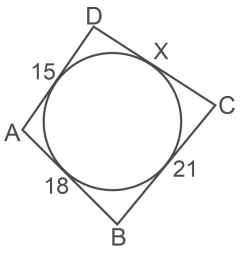
AO = 26 cm
PO = OQ = 10 cm
AP = $\sqrt{26^2 - 10^2}$ = 24
AP = AQ = 24 cm
हम जानते है की,
AP + AQ = AB + BC + AC
24 + 24 = AB + BC + AC
ΔABC की परिमाप = 24 + 24 = 48 cm

11). यदि एक चतुर्भुज ABCD एक वृत्त को परिचालित करता है



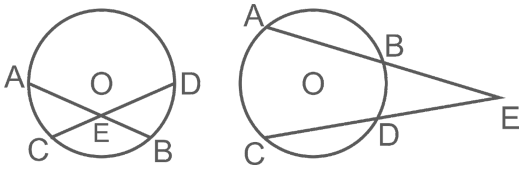
AB + CD = AD + BC

उदाहरण :- एक वृत्त, चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाओं को स्पर्श करता है। यदि AB = 18 cm, BC = 21 cm और AD = 15 cm है, तो CD की लंबाई क्या होगी ?
SSC CGL Tier II (02/03/2023)
(a) 16 cm (b) 14 cm (c) 12 cm (d) 18 cm
हल :-



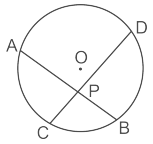
AB + CD = BC + AD .....(प्रमेय के अनुसार)
18 + x = 21 + 15 ⇒ x = 18 cm

12). एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD आंतरिक या बाह्य रूप से E पर प्रतिच्छेद करती हैं:
$AE \times EB = CE \times ED$



@apna_pdf

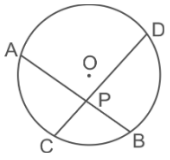
उदाहरण :- आकृति में, O वृत्त का केंद्र है। इसकी दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को वृत्त के भीतर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि AB = 20 सेमी, PB = 12 सेमी और CP = 8 सेमी है, तो PD का माप ज्ञात कीजिए।



SSC CGL 06/12/2022 (3rd Shift)

(a) 12 cm (b) 11 cm (c) 22 cm (d) 14 cm.

हल :-



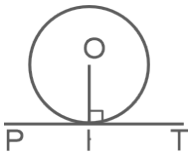
अवधारणा :-

PA × PB = PC × PD ....(जीवा प्रतिच्छेद प्रमेय)

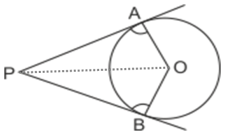
8 × 12 = 8 × PD ⇒ PD = 12 cm

13). किसी वृत्त की परिधि पर एक बिंदु पर स्पर्शरेखा उस बिंदु पर त्रिज्या के लंबवत होती है।

OI ⊥ PT



14). केंद्र O वाले एक वृत्त के बाहरी बिंदु P से दो स्पर्शरेखाएँ PA और PB खींची गई हैं।



i) ∠APO = ∠BPO

ii) PA = PB

iii) ∠PAO = ∠PBO = 90°

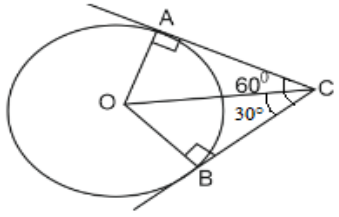
iv) OA = OB

उदाहरण :- यदि 3 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ एक दूसरे से 60° के कोण पर झुकी हों, तो प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई कितनी है?

SSC CPO 09/11/2022 (Afternoon)

(a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm (b) $3\sqrt{3}$ cm (c) 3 cm (d) 6 cm

हल :-



△AOC ≅ △BOC (RHS द्वारा)

△AOC में, हमारे पास है :

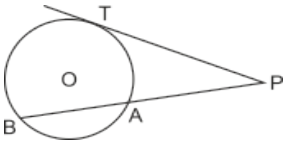
Tan30° = $\frac{AO}{AC} = \frac{3}{AC}$

⇒ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AC}$ ⇒ AC = $3\sqrt{3}$ cm

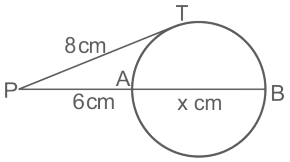
अत: प्रत्येक स्पर्श रेखा की लम्बाई = $3\sqrt{3}$ cm

15). एक बिंदु P से वृत्त पर खींची गई एक स्पर्शरेखा, PT और एक छेदक, PB के लिए,

$PT^2 = PB \times PA$



उदाहरण :- दी गई आकृति में, PAB एक छेदक (सीकेंट) है और PT, P से वृत की स्पर्श रेखा है। यदि PT = 8 cm, PA = 6 cm और AB = x cm है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



SSC CGL 14/07/2023 (1st shift)

(a) $\frac{14}{9}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{14}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

हल :-

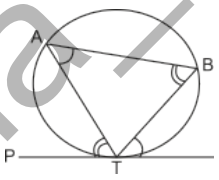
स्पर्श रेखा एवं छेदक सूत्र का प्रयोग :-

PT^2 = PA × PB

64 = 6 × (6 + x) ⇒ (6 + x) = $\frac{32}{3}$ ⇒ $x = \frac{14}{3}$ cm

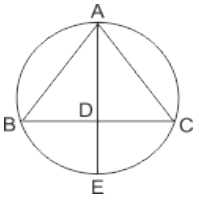
16). किसी जीवा द्वारा स्पर्शरेखा के साथ बनाया गया कोण हमेशा परिधि के किसी भी बिंदु पर उस जीवा द्वारा बनाए गए कोण के बराबर होता है।

$\angle PTA = \angle ABT$

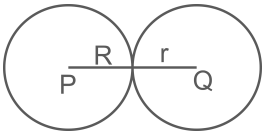


17). निम्नलिखित मामले में:

$AB \times AC + AE \times DE = AE^2$

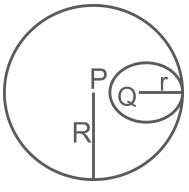


18). यदि दो वृत्त एक दूसरे को बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं, तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्या का योग होती है।



PQ = R + r

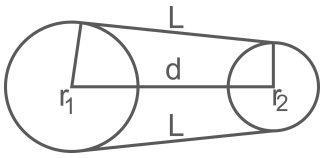
19). यदि दो वृत्त एक दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं, तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्या का अंतर है।



PQ = R - r

@apna_pdf

उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा :-



उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा की लंबाई (L) = $\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$

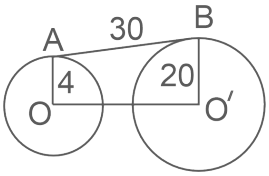
जहां , d = दो केंद्रों के बीच की दूरी और r1, r2 वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

उदाहरण :- दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 20 cm और 4 cm हैं। सीधी उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा की लंबाई 30 cm है। उनके केंद्रों के बीच की दूरी कितनी है? (cm में)

SSC CHSL 17/03/2023 (2nd Shift)

(a) 36 (b) 38 (c) 34 (d) 32

हल :-



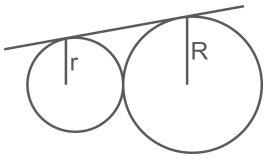
माना AB सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है

तब, AB

$\sqrt{\text{(केंद्रों के बीच की दूरी)}^2 - \text{(दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के बीच का अंतर)}^2}$

$\Rightarrow (30)^2 = (OO')^2 - (20 - 4)^2$

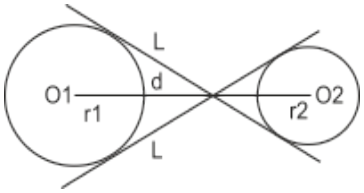
$\Rightarrow (OO')^2 = 1156 \Rightarrow (OO') = 34$ cm



उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा की लंबाई (L) = $2\sqrt{Rr}$

केंद्र के बीच की दूरी = R + r

अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा :-



अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा की लंबाई (L) = $\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$

उदाहरण :- यदि दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 12 cm है और त्रिज्याएँ 5 cm और 4 cm हैं, तो अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा की लंबाई (cm में) क्या है?

SSC CHSL 02/08/2023 (2nd Shift)

(a) 9 (b) $\sqrt{143}$ (c) $\sqrt{63}$ (d) 7

हल :-

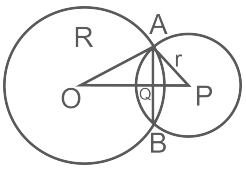
अनुप्रस्थ उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा की लंबाई

$= \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2} = \sqrt{12^2 - (5 + 4)^2} = \sqrt{144 - (81)} = \sqrt{63}$

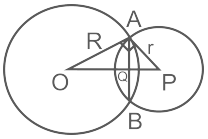
19). त्रिज्या R और r वाले दो वृत्त प्रतिच्छेद करते हैं और AB उभयनिष्ठ जीवा है, तब

AQ = BQ = $\frac{AB}{2}$

$\angle AQP = \angle AQO = 90^\circ$

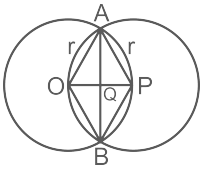


20). जब ∠OAP = 90° अर्थात बिंदु A या B पर एक वृत्त की स्पर्श रेखा दूसरे वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती है।



OP = $\sqrt{R^2 + r^2}$

21). जब दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर हों और दोनों वृत्त दूसरे वृत्त के केन्द्रों से होकर गुजरते हों, अर्थात, R = r



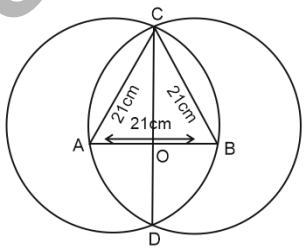
$\Rightarrow$ AB = $\sqrt{3}$a

उदाहरण :- समान त्रिज्या वाले दो वृत्त एक-दूसरे को इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि प्रत्येक वृत्त दूसरे के केंद्र से होकर गुजरता है। इन दोनों बृत्तों के व्यास का योग 84 cm है। इसकी उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई कितनी है ? (cm में)

SSC CHSL 17/03/2023 (4th Shift)

(a) $21\sqrt{3}$ (b) $14\sqrt{3}$ (c) $28\sqrt{3}$ (d) $24\sqrt{3}$

हल :-



ΔABC में,

AB = BC = CA ... (त्रिज्या)

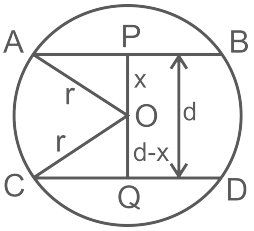
इसलिए, ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा 21 सेमी के बराबर है।

समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई = $\frac{\sqrt{3} \times \text{भुजा}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ सेमी.

अब जीवा CD की लंबाई = 2 × CO = $21\sqrt{3}$ सेमी.

जब दो जीवाएं एक वृत्त में समानांतर खींची जाती हैं :-

i). केंद्र के विपरीत



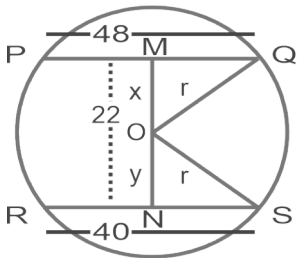
$r^2 = AP^2 + X^2$ ---------- **(i)**

$r^2 = CQ^2 + (d - x)^2$ ---------- **(ii)**

उदाहरण :- PQ और RS एक वृत्त की दो समानांतर जीवाएं हैं, ये इस प्रकार हैं कि PQ, 48 cm और RS, 40 cm है। यदि जीवाएं केंद्र की

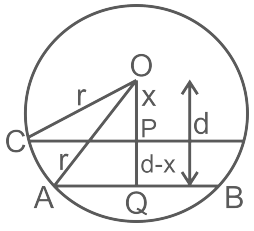
@apna_pdf

विपरीत दिशा में हैं और उनके बीच की दूरी 22 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या (cm में) ज्ञात करें।
SSC CPO 09/11/2022 (Afternoon)
(a) 25 (b) 24 (c) 35 (d) 22
हल :-



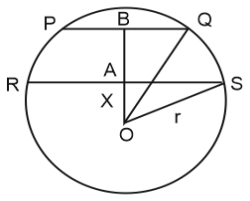
दी गई आकृति से,
MQ = $\frac{48}{2}$ = 24 सेमी
और NS = $\frac{40}{2}$ = 20 सेमी
x + y = 22 ---------- (1)
△MOQ में, हमारे पास है:
$r^2 = x^2 + 24^2$ ---------- (2)
△NOS में, हमारे पास है:
$r^2 = y^2 + 20^2$ ---------- (3)
समीकरण (2) और (3) से, हमारे पास है:
$x^2 + 24^2 = y^2 + 20^2 \Rightarrow x^2 + 576 = y^2 + 400$
$\Rightarrow x^2 - y^2 = -176 \Rightarrow (x - y)(x + y) = -176$
(x - y)22 = -176 (समीकरण (1) से)
x - y = - 8 ---------- (4)
अब, समीकरण (1) और (4) से, हम पाते हैं:
x = 7 और y = 15
अब समीकरण (2) में x = 7 रखने पर, हम पाते हैं:
r = $\sqrt{49 + 576}$ = 25 सेमी
शॉर्ट ट्रिक :-
पाइथागोरस त्रिक →
(15 , 20 , **25**) और (7 , 24 , **25**)
20 सेमी और 24 सेमी वृत्त की दी गई जीवाएँ हैं।
जीवा के बीच की दूरी = (15 + 7) = 22 सेमी
दी गई शर्तें संतुष्ट हैं।
स्पष्टतः , वृत्त की त्रिज्या = 25 सेमी

ii). केंद्र के एक ही तरफ :-



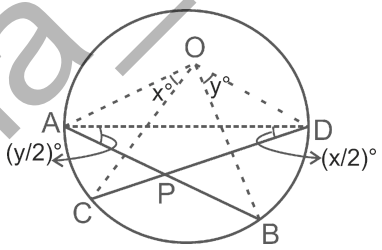
$r^2 = PC^2 + X^2$ ---------- **(i)**
$r^2 = AQ^2 + (d)^2$ ---------- **(ii)**

उदाहरण :- PQ और RS क्रमशः 10 cm और 24 cm लंबी, एक वृत्त की दो समानांतर जीवाएँ हैं और केंद्र O के एक ही तरफ स्थित हैं। यदि जीवाओं के बीच की दूरी 7 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या (cm में) क्या है?
SSC CHSL 03/06/2022 (Afternoon)
(a) 11 (b) 9 (c) 13 (d) 7
हल :-



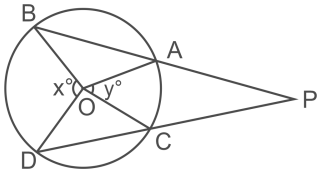
BQ = $\frac{PQ}{2} = \frac{10}{2}$ = 5 cm , AS = $\frac{RS}{2} = \frac{24}{2}$ = 12 cm , AB = 7 cm ,
OQ = OS = r
△BOQ में,
$OB^2 + BQ^2 = OQ^2$
$(7 + x)^2 + 5^2 = r^2$ – (1)
△OAS में,
$OA^2 + AS^2 = OS^2$
$x^2 + 12^2 = r^2$ – (2)
समीकरण (1) और (2) से हम प्राप्त करते हैं
$(7 + x)^2 + 5^2 = x^2 + 12^2$
$49 + x^2 + 14x + 25 = x^2 + 144$
74 + 14x = 144
14x = 70 ⇒ x = 5 cm
अब x = 5 को समीकरण (2) में रखने पर
$r^2 = 5^2 + 12^2$ = 169 ⇒ r = 13 cm

• केंद्र O वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को P पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि ∠AOC = x° और ∠BOD = y° है तो ∠BPD का मान है:-



∠BPD = $\frac{x+y}{2}$

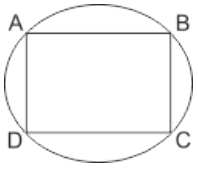
• जीवाएँ बाहरी बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर रही हैं।



∠BPD = $\frac{x-y}{2}$

चक्रीय चतुर्भुज

i). एक वृत्त के अंदर बनाया गया एक चतुर्भुज जिसके शीर्ष परिधि पर स्थित हैं।

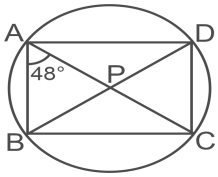


सम्मुख कोणों का योग = 180°
अर्थात् $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

उदाहरण :- एक वृत्त में, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है AC और BD एक दूसरे को P पर प्रतिच्छेद करता है। यदि AB = AC और ∠BAC = 48° है,

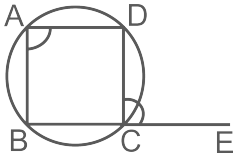
@apna_pdf

तो ∠ADC का माप है:
SSC CGL 12/04/2022 (Evening)
(a) 104° (b) 112° (c) 132° (d) 114°
हल :-

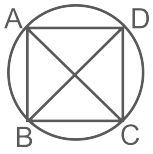


यहाँ AB = AC, अतः ∠ABC = ∠ACB
ΔABC में,
∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = 180°
2∠ABC = 180° − 48° = 132°
∠ABC = 66°
अत:
∠ADC = 180° − ∠ABC = 180° − 66° = 114°
(चक्रीय चतुर्भुज में सम्मुख कोणों का योग 180° होता है)

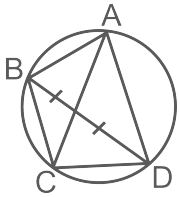
ii). चक्रीय चतुर्भुज का बाहरी कोण विपरीत आंतरिक कोण के बराबर होता है।
$\angle A = \angle DCE$



iii). टॉलेमी का प्रमेय: यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, तो
AB × DC + BC × AD = AC × BD



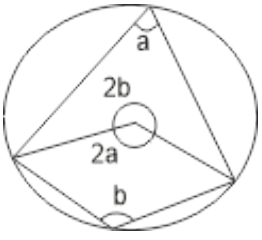
यदि चक्रीय चतुर्भुज का विकर्ण दूसरे विकर्ण को समद्विभाजित करता है



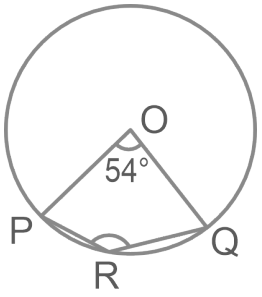
i). जब AC, BD को काटता है;
AB × BC = CD × AD

ii) जब BD, AC को काटता है;
AB × AD = BC × CD

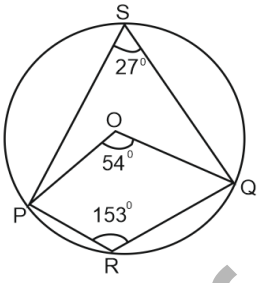
महत्वपूर्ण परिणाम: निम्नलिखित प्रकार के चक्रीय चतुर्भुज में कोणों के बीच संबंध को याद रखें, जैसा कि दिखाया गया है:



उदाहरण :- दी गई आकृति में, O वृत्त का केंद्र है। ∠POQ = 54° है तो ∠PRQ का माप (डिग्री में) क्या है?

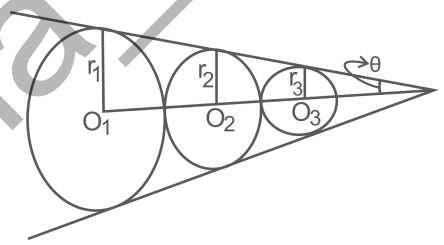


SSC CGL 13/04/2022 (Afternoon)
(a) 235 (b) 137 (c) 207 (d) 153
हल :-



मान लीजिए S परिधि पर कोई बिंदु है.
∠PSQ =
$\frac{1}{2}$ × ∠POQ = 27°
∠PSQ + ∠PRQ = 180° (चक्रीय चतुर्भुज)
∠PRQ = 180° − 27° = 153°

जब त्रिज्या GP में हो:-



$$r^2 = \sqrt{r_1 \times r_3}$$

और

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}$$

@apna_pdf

	गुण	आयत	वर्ग	समान्तरचतुर्भुज	समचतुर्भुज	समलंब
भुजा	सभी भुजा समान हैं	✗	✓	✗	✓	✗
	विपरीत भुजाएँ बराबर हैं	✓	✓	✓	✓	✗
	विपरीत भुजाएँ समानान्तर हैं	✓	✓	✓	✓	✗
कोण	सभी कोण बराबर हैं	✓	✓	✗	✗	✗
	विपरीत कोण बराबर होते हैं	✓	✓	✓	✓	✗
	दो आसन्न कोणों का योग 180° है	✓	✓	✓	✓	✗
विकर्णों	एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।	✓	✓	✓	✓	✗
	लम्बवत् समद्विभाजित करते है।	✗	✓	✗	✓	✗
सूत्र	क्षेत्रफल	लंबाई × चौड़ाई	भुजा^{2}	लंबाई × ऊंचाई	$\frac{1}{2}$ × विकर्ण$_1$ × विकर्ण$_2$	$\frac{1}{2}$ × (समांतर भुजाओ का योग) × ऊंचाई
	परिमाप	2 × (लंबाई+चौड़ाई)	4(भुजा)	2 × (लंबाई+ऊंचाई)	4(भुजा)	सभी भुजाओ का योग

@apna_pdf

क्षेत्रमिति (2D)
[सतह क्षेत्र और परिमाप]

2- D :- द्वि-आयामी आकृतियों के अंतर्गत हम अध्ययन करेंगे :
- त्रिभुज (Triangles)
- चतुर्भुज (Quadrilateral)
- बहुभुज (Polygons)
- वृत्त (Circle)

नोट :- 2D आकृति के लिए, क्षेत्रफल और परिमाप की गणना की जाती है

त्रिभुज

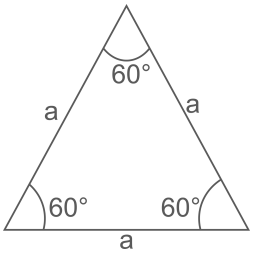
किसी त्रिभुज जिसकी ऊंचाई, h है और आधार, b है तो,

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times b \times h$

परिमाप = सभी भुजाओं का योग

विशेष स्थितियां

1) समबाहु त्रिभुज :- सभी भुजाएं बराबर होंगी और सभी कोण $60°$ के होंगे ।

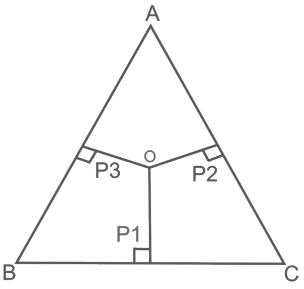


- क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$
- ऊंचाई = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
- परिमाप = $3a$
- अंतःत्रिज्या(r) = $\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{h}{3}$
- परित्रिज्या(R) = $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{3}$

उदाहरण :- यदि एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $25\sqrt{3}\ cm^2$ है तो त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई है :
RRC Group D 23/08/2022 (Afternoon)
(a) 12 cm (b) 5 cm (c) 8 cm (d)10 cm

हल :- समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2 = 25\sqrt{3} \Rightarrow \text{भुजा} = \sqrt{\frac{25\sqrt{3} \times 4}{\sqrt{3}}} = 10$ cm

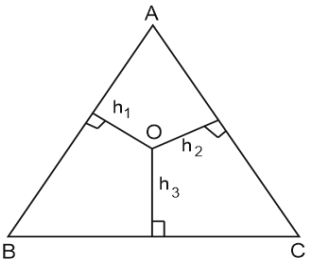


यदि P1, P2 और P3 त्रिभुज के अंदर एक बिंदु से भुजा के लंबवत हैं तो,

- त्रिभुज की ऊँचाई = P1 + P2 + P3
- त्रिभुज की भुजा = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (P1 + P2 +P3)
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{(P1 + P2 + P3)^2}{\sqrt{3}}$

उदाहरण :- 'O' एक समबाहु त्रिभुज के अंदर एक बिंदु है। 'O' से भुजाओं की लंबवत दूरी √3cm , 2√3cm , 5√3cmहै । त्रिभुज का परिमाप___ है।
SSC CGL 13/12/2022 (4th Shift)
(a) 48 cm (b) 32 cm (c) 24 cm (d) 64 cm

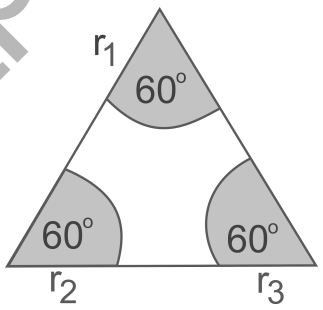
हल :-



भुजा (a) = $\frac{2}{\sqrt{3}}(h_1 + h_2 + h_3)$

= $\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3})$ = 16 cm

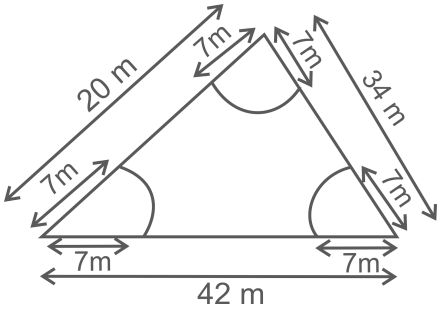
समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × a = 48 cm



- छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$
- अछायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

उदाहरण :- तीन घोड़ों को 20 मीटर, 34 मीटर और 42 मीटर की भुजा वाले त्रिकोणीय मैदान के तीन कोनों पर 7 मीटर लंबी रस्सियों से बांधा गया है। भूखंड का वह क्षेत्र जो घोड़ों द्वारा चरा जा सकता है और भूखंड का वह क्षेत्र जो चरने से बचा रहता है क्या होगा ?

हल :-



छायांकित भाग का क्षेत्रफल :- $\frac{\pi}{6}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

$\frac{\pi}{6}((7)^2 + (7)^2 + (7)^2) = 77$ मी^{2}

अछायांकित भाग का क्षेत्रफल :-

@apna_pdf

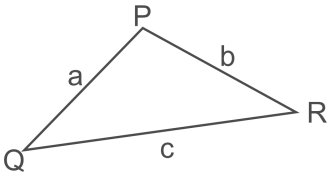
त्रिभुज का अर्धपरिमाप = $\frac{20+34+42}{2}$ = 48 मी.

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{48(48-20)(48-34)(48-42)}$ = 336 मी.^{2}

अतः, अछायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = (336 - 77) = 259 मी.^{2}

2) विषमबाहु त्रिभुज :- सभी भुजाओं की लम्बाई असमान होगी ।



- क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ इस सूत्र को हीरोन का सूत्र कहते हैं।

जहाँ, अर्ध-परिमाप (s) = $\frac{a+b+c}{2}$

- परिमाप = $a + b + c$

उदाहरण :- एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी भुजाएँ क्रमशः 42 सेमी, 36 सेमी और 34 सेमी हैं।

RRC Group D 06/10/2022 (Morning)

(a) 112 $\sqrt{110}$ cm² (b) 56 $\sqrt{110}$ cm²

(c) 14 $\sqrt{55}$ cm² (d) 28 $\sqrt{55}$ cm²

हल :- भुजाएँ = 42, 36 और 34

S = $\frac{42+36+34}{2}$ = 56

त्रिभुज का क्षेत्रफल =

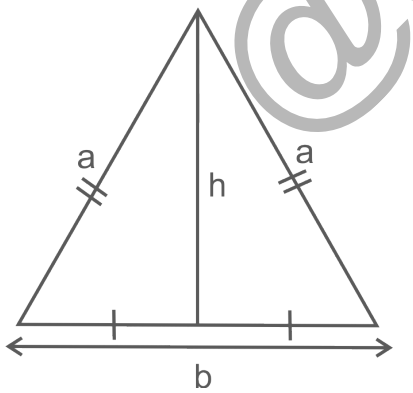
$\sqrt{56 \times (56-42) \times (56-36) \times (56-34)}$

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{56 \times 14 \times 20 \times 22}$

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{4 \times 14 \times 14 \times 4 \times 5 \times 2 \times 11}$

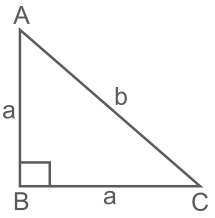
त्रिभुज का क्षेत्रफल = $56\sqrt{110}\ cm^2$

3) समद्विबाहु त्रिभुज :- दो भुजा और दो कोण समान होंगे । शीर्ष-लम्ब,आधार को समान भागों में बांटता है ।



- क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$
- ऊंचाई = $\sqrt{a^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$
- परिमाप = $a + a + b = 2a + b$
- परित्रिज्या = $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$

यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज समकोण त्रिभुज है तो,



- क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}a^2$
- कर्ण (b) = $a\sqrt{2}$

उदाहरण :- एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा जिसका परिमाप 16 सेमी है:

Delhi Police H.C.M. 12/10/2022 (Evening)

(a) 32(5 - √2) cm² (b) 64(3 - 3√3) cm²

(c) 56(3 - √2) cm² (d) 64(3 - 2√2)cm²

हल :- मान लीजिए एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की दोनों भुजाएँ और कर्ण क्रमशः x और y हैं,

पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके,

हमारे पास है, $2x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{2}}$

2x + y = 16 (दिया गया है))

$2 \times \frac{y}{\sqrt{2}} + y = 16$, $y(\sqrt{2}+1) = 16$, $y = \frac{16}{\sqrt{2}+1}$

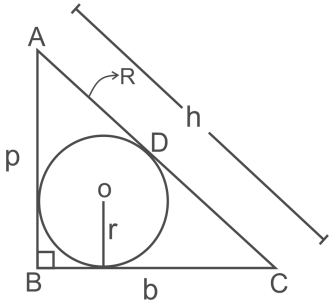
समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}x^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{y^2}{2} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{16}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = \frac{64}{(\sqrt{2}+1)^2}$

$= \frac{64}{2+1+2\sqrt{2}} = \frac{64}{3+2\sqrt{2}}$ (तर्कसंगतीकरण पर)

= $64(3 - 2\sqrt{2})cm^2$

4) समकोण त्रिभुज :- इनमें एक कोण 90° होता है



यंहा, p = लम्ब, b = आधार और h = कर्ण

- क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times b \times p$
- परिमाप = $p + b + h$
- पाइथागोरस प्रमेय : $h^2 = p^2 + b^2$
- अंतःत्रिज्या(r) = $\frac{p+b-h}{2}$
- परित्रिज्या(R) = $\frac{h}{2}$

नोट :- कुछ पाइथागोरस त्रिक(Triplet) : $(2n, n^2-1, n^2+1)$, (1, 1, $\sqrt{2}$), (1, 2, $\sqrt{5}$), (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (9, 40, 41), (8, 15, 17), (12, 35, 37), (11, 60, 61), (65, 72 97), (96, 110, 146). इन सभी को याद रखे।

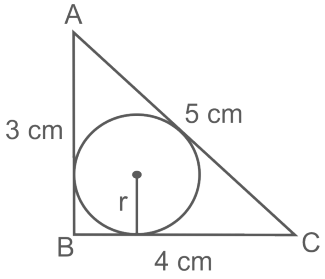
उदाहरण :- ABC एक समकोण त्रिभुज है। यदि समकोण वाली दो भुजाओं की लंबाई 4 सेमी और 3 सेमी है। इसके अन्तः वृत्त की त्रिज्या है:

RRB NTPC CBT - I 15/02/2021 (Morning)

@apna_pdf

(a) 1 सेमी (b) 4 सेमी (c) 2 सेमी (d) 3 सेमी

हल :-



क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6cm^2$

S = $\frac{3+4+5}{2} = 6cm$

अंतःत्रिज्या = r = $\frac{\Delta \text{ का क्षेत्रफल}}{\text{अर्ध परिमाप}}$

अंतःत्रिज्या = r = $\frac{6}{6} = 1\ cm$

Exam hall approach:-

अंतःत्रिज्या = $\frac{a+b-c}{2} = \frac{3+4-5}{2} = 1\ cm$

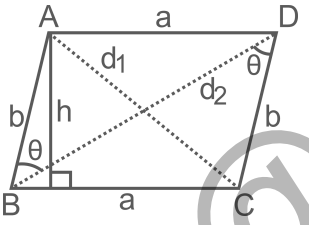
चतुर्भुज

चार भुजाओं से बनी एक आकृति को चतुर्भुज कहा जाता है। एक चतुर्भुज में चार कोण होते हैं और इन कोणों का योग 360° के बराबर होता है।

विशेष स्थितियां

1) Parallelogram / समान्तर चतुर्भुज :-

एक चतुर्भुज जिसकी विपरीत भुजाएं समानांतर और बराबर हो।



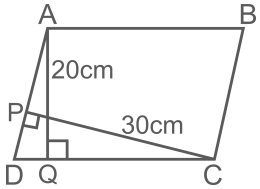
- क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई
- परिमाप = 2 (a + b)
- $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$
- एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं, सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण :- एक समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 300 सेमी ^{2} है। AB और CD के बीच की दूरी 20 सेमी है और BC और AD के बीच की दूरी 30 सेमी है। समांतर चतुर्भुज का परिमाप (सेमी में) क्या है?

SSC MTS 05/10/2021 (Evening)

(a) 60 (b) 50 (c) 40 (d) 100

हल :- प्रश्न के अनुसार



समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई

आधार AD के लिए,

300 = AD × CP ⇒ 300 = AD × 30 ⇒ AD = 10 cm,

BC = AD = 10 cm

इसी प्रकार, आधार CD के लिए,

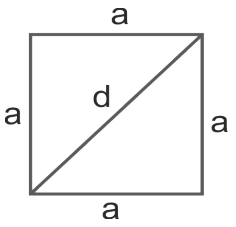
300 = CD × AQ ⇒ 300 = CD × 20

⇒ CD = 15 cm, AB = CD = 15 cm

तो, परिमाप = AB + BC + CD + AD

= 10 + 15 + 10 + 15 = 50 cm

2) वर्ग :– एक समांतर चतुर्भुज जिसकी भुजाएं बराबर हो और सभी कोण 90° हो.



- क्षेत्रफल = (भुजा)$^2 = a^2 = \frac{d^2}{2}$
- परिमाप = 4 × भुजा = 4a
- विकर्ण (d) = a$\sqrt{2}$

उदाहरण :- एक वर्ग का क्षेत्रफल क्या है जिसका विकर्ण $5\sqrt{2}$ सेमी है?

SSC MTS 11/05/2023 (Morning)

(a) 64 cm² (b) 25 cm² (c) 100 cm² (d) 36 cm²

हल :- वर्ग का विकर्ण ($\sqrt{2}\ a$) = $5\sqrt{2}$

भुजा(a) = 5 cm

वर्ग का क्षेत्रफल $(a)^2$ = 5 × 5 = 25 cm^2

3) आयत :– एक समांतर चतुर्भुज जिसकी विपरीत भुजाएं बराबर हो और सभी कोण 90° हो

- क्षेत्रफल = लंबाई ×चौड़ाई = L × B
- परिमाप = 2 (L + B)
- विकर्ण (d) = $\sqrt{L^2 + B^2}$

उदाहरण :- एक आयत की लंबाई और चौड़ाई 3:4 के अनुपात में है। यदि आयत का क्षेत्रफल 108 सेमी² है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

SBI Clerk Pre 22/06/2019 (1st Shift)

(a) 40 cm (b) 42 cm (c) 24 cm (d) 56 cm (e) इनमे से कोई नहीं

हल :- माना आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः $3x$ और $4x$ है

आयत का क्षेत्रफल = $3x \times 4x = 108$

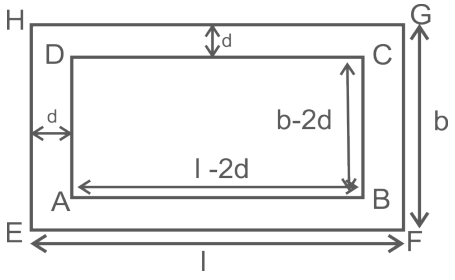
⇒ $12x^2 = 108 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$cm

लंबाई = 3 × 3 = 9 cm

चौड़ाई = 3 × 4 = 12 cm

अभीष्ट परिमाप = 2(9 + 12) = 42cm

(a) एक आयताकार क्षेत्र के अंदर का पथ :-

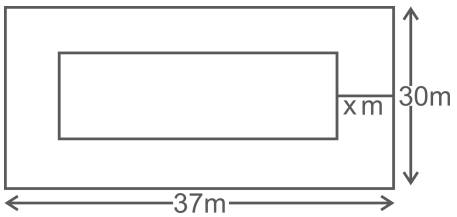


- पथ का क्षेत्रफल = 2d (l + b - 2d)
- परिमाप = 4(l + b - 2d)

@apna_pdf

उदाहरण :- 37m, 30m माप वाले एक आयताकार पार्क के भीतरी भाग के चारों ओर एक पथ 570 m^2 घेरता है। पथ की चौड़ाई कितनी है?
RRB NTPC CBT - I 01/02/2021 (Evening)
(a) 10 m (b) 15 m (c) 5 m (d) 28 m

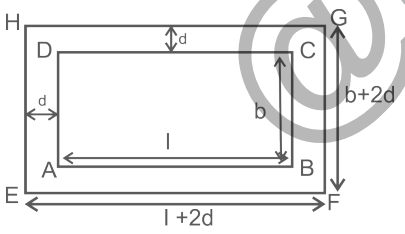
हल :-



पथ का क्षेत्रफल = बड़े आयत का क्षेत्रफल - छोटे आयत का क्षेत्रफल
$\Rightarrow 570 = 37 \times 30 - (37 - 2x)(30 - 2x)$
$\Rightarrow 570 = 1110 - (1110 - 134x + 4x^2)$
$\Rightarrow 570 = 134x - 4x^2$
$\Rightarrow 4x^2 - 134x + 570 = 0$
$\Rightarrow 4x^2 - 20x - 114x - 570 = 0$
$\Rightarrow 4x(x - 5) - 114(x - 5) = 0$
$\Rightarrow (x - 5)(4x - 114) = 0$
$x = 5$ या $x = \frac{114}{4}$

Exam hall approach :-
पथ का क्षेत्रफल = $2d$ (l + b - 2d)
$570 = 2 \times (d)[37 + 30 - 2 \times d]$
$570 = 2d[67 - 2d]$
$\Rightarrow 4d^2 - 134d + 570 = 0$
$\Rightarrow 4d^2 - 20d - 114d - 570 = 0$
$\Rightarrow 4d(d - 5) - 114(d - 5) = 0$
$\Rightarrow (d - 5)(4d - 114) = 0$
$\Rightarrow d = 5\ m$ या $d = \frac{114}{4}$ m

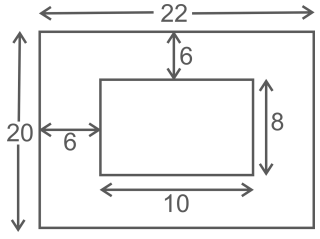
(b) एक आयताकार मैदान के बाहर का पथ :-



- पथ का क्षेत्रफल = 2d (l + b + 2d)
- परिमाप = 4(l + b + 2d)

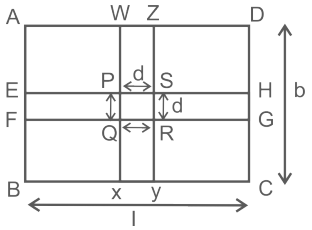
उदाहरण :- 6 मीटर चौड़ा एक पथ 10 मीटर लंबे और 8 मीटर चौड़े एक आयताकार भूखंड के चारों ओर और बाहर चलता है। पथ का क्षेत्रफल (m^2 में) ज्ञात कीजिये?
SSC MTS 07/10/2021 (Afternoon)
(a) 440 (b) 600 (c) 80 (d) 360

हल :-



पथ का क्षेत्रफल = (22 × 20) − (10 × 8) = 440 − 80 = 360 m^2
Exam hall approach :- पथ का क्षेत्रफल = 2d (l + b + 2d)
= 2 × 6 (10 + 8 + 2 × 6) = 360 m^2

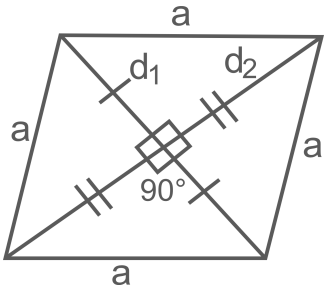
(c) एक आयताकार मैदान के मध्य का पथ :-



- पथ का क्षेत्रफल = d (l + b - d)
- परिमाप = 2(l + b - 2d)

उदाहरण :- एक आयताकार मैदान की लंबाई 40 मीटर और चौड़ाई 34 मीटर है। इसके अंदर दो रास्ते एक दूसरे को काटते हुए बने हुए हैं, जिनमें से एक रास्ता चौड़ाई के समांतर है। प्रत्येक रास्ते की चौड़ाई 4 मीटर है। इन रास्तों को बजरी से ढकने में लगने वाली लागत ज्ञात कीजिए, यदि बजरी की दर ₹4.5 प्रति वर्ग मीटर है।
हल :- प्रश्न के अनुसार,
पथ का क्षेत्रफल = d(l + b - d) = 4(40 + 34 - 4) = 280 m^2
आवश्यक लागत = 280 × 4.5 = 1260 रुपये

4) Rhombus / समचतुर्भुज :- यह एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसकी चारो भुजाएं बराबर होती है । एक समचतुर्भुज में विपरीत कोण बराबर होते हैं।



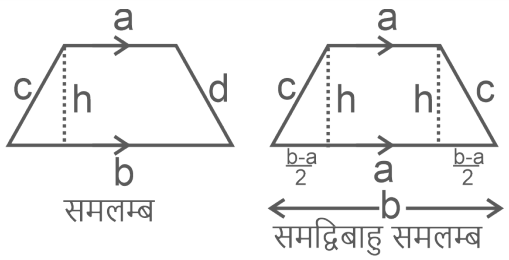
यहाँ , a = भुजा ; d_1 और d_2 विकर्ण हैं।

- क्षेत्रफल= $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
- भुजा (a) = $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$
- परिमाप = 4a
- $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$
- विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर काटते है और दो समान भागों में बांटते है।

उदाहरण :- समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (सेमी² में) ज्ञात करें, जिसके विकर्णों की लंबाई क्रमशः 7.5 सेमी और 5.6 सेमी है।
SSC MTS 11/09/2023 (3rd Shift)
(a) 21 (b) 28 (c) 27 (d) 30
हल :- समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
= $\frac{1}{2} \times 7.5 \times 5.6 = 21\ cm^2$

5) Trapezium/समलम्ब चतुर्भुज :- एक चतुर्भुज जिसकी विपरीत भुजाओं की एक जोड़ी समानांतर हो।

@apna_pdf



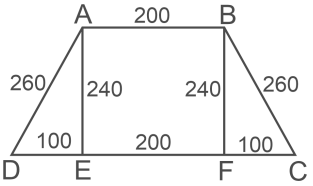
यहाँ, a और b समानांतर भुजाएँ हैं और h, a और b के बीच की ऊँचाई या लंबवत दूरी है।

- क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ऊंचाई × समानांतर भुजाओं का योग

$= \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$

उदाहरण :- एक मैदान एक समलंब के आकार का है जिसकी समानांतर भुजाएँ 200 मीटर और 400 मीटर लंबी हैं, जबकि अन्य दो भुजाएँ 260 मीटर लंबी हैं। मैदान का क्षेत्रफल (m^2 में) क्या है?
SSC CPO 11/12/2019 (Morning)
(a) 48000 (b) 52000 (c) 72000 (d) 60000

हल :-



ΔADE में, पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$\Rightarrow 260^2 - 100^2 = AE^2$

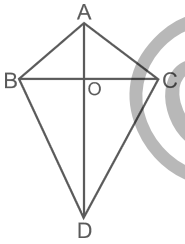
$\Rightarrow 360 \times 160 = AE^2$

$\Rightarrow AE = 6 \times 4 \times 10 \Rightarrow AE = 240$

समलंब का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times (200 + 400) \times 240 = 600 \times 120 = 72000\ m^2$

6) पतंग :- पतंग एक चतुर्भुज है जिसमें आसन्न भुजाओं के दो जोड़े बराबर होते हैं।



- आसन्न भुजाओं की लंबाई बराबर है। i.e, AB = AC , BD = DC
- बड़ा विकर्ण छोटे विकर्ण को समद्विभाजित करता है। **i.e,** BO = OC
- परिमाप = 2 (a + b)
- क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

नोट :- चतुर्भुज के बारे में महत्वपूर्ण बिंदु :-

1. एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
2. एक समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफल के दो त्रिभुज में विभाजित करता है।
3. आयत के विकर्ण बराबर होते है और एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
4. वर्ग के विकर्ण बराबर होते है और एक दूसरे को 90° पर समद्विभाजित करते हैं।
5. समचतुर्भुज के विकर्ण बराबर नहीं होते है और एक दूसरे को 90° पर समद्विभाजित करते हैं।
6. एक समान्तर चतुर्भुज और आयत बराबर क्षेत्रफल के होंगे यदि वो एक ही आधार और सामानांतर रेखाओं के बीच बने हो।

समबहुभुज

एक समबहुभुज में सभी भुजायें और सभी आंतरिक कोण बराबर होते है। एक बहुभुज को पंचभुज (pentagon), षट्भुज (hexagon) , सप्तभुज (heptagon), अष्टभुज (octagon), नौभुज (nonagon) तथा दसभुज (decagon) कहा जा सकता है क्योंकि उनमें क्रमशः 5, 6, 7 , 8 , 9 , 10 भुजाएँ होती हैं ।
यदि n भुजाओं वाले एक सम बहुभुज की प्रत्येक भुजा a के बराबर है, तो :

- सम पंचभुज (regular pentagon) का क्षेत्रफल = $\frac{6.9}{4} \times a^2$
- सम षट्भुज (regular hexagon) का क्षेत्रफल = $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
- प्रत्येक बाह्य कोण = $\frac{360°}{n}$
- सभी बाह्य कोणों का योग = 360°
- प्रत्येक आतंरिक कोण = $\frac{(n-2)}{n} \times 180°$
- प्रत्येक आतंरिक कोण = 180° − बाह्य कोण
- सभी आंतरिक कोणों का योग = $(n - 2) \times 180°$
- विकर्णों की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$

उदाहरण :- एक नियमित षट्भुज का क्षेत्रफल क्या है जिसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 4 सेमी है ?
RRC Group D 27/09/2022 (Morning)
(a) $24\sqrt{3}\ cm^2$ (b) $27\sqrt{3}\ cm^2$ (c) $25\sqrt{3}\ cm^2$ (d) $26\sqrt{3}\ cm^2$

हल :- नियमित षट्भुज का क्षेत्रफल = $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$

$\Rightarrow 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 4 = 24\sqrt{3}\ cm^2$

उदाहरण :- यदि किसी नियमित बहुभुज के बाह्य कोण और आंतरिक कोण का अनुपात 1:5 है, तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या क्या है?
SSC MTS 22/07/2022 (Afternoon)
(a) 24 (b) 22 (c) 12 (d) 30

हल :- बाह्य कोण और आंतरिक कोण का अनुपात = 1 : 5
प्रश्न के अनुसार, x + 5x = 180 ⇒ x = 30

भुजाओं की संख्या (n) = $\frac{360°}{\text{बाह्य कोण}} = \frac{360}{30} = 12$

उदाहरण :- 28-भुजा वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या है:

हल :- n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$

n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या

$= \frac{28\ (28-3)}{2} = \frac{28 \times 25}{2} = 350$

उदाहरण :- 18 भुजाओं वाले एक नियमित बहुभुज के प्रत्येक आंतरिक कोण का माप ज्ञात कीजिए :

हल :- n भुजाओं वाले बहुभुज के आंतरिक कोणों का योग
= (n - 2) × 180°(n = बहुभुज की भुजाओं की संख्या)
= (18 - 2) × 180° = 2880°

नियमित बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण = $\frac{2880}{18} = 160°$

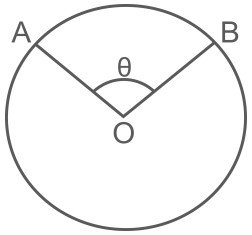
Exam hall approach:- प्रत्येक आंतरिक कोण = $\frac{(n-2)}{n} \times 180°$

सम बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण = $\frac{(18-2)}{18} \times 180° = 160°$

@apna_pdf

वृत्त

यह उस रेखा से घिरी सपाट आकृति होती है, जिसके प्रत्येक बिंदु की दूरी वृत्त के भीतर एक स्थिर बिंदु (केंद्र) से बराबर होती है ।



- क्षेत्रफल = πr^2
- परिधि (परिमाप) = $2\pi r$
- व्यास = 2r
- चाप की लंबाई(AB) = $2\pi r \times \frac{\theta}{360°}$
- वृत्त खंड AOB का क्षेत्रफल = $\pi r^2 \times \frac{\theta}{360°}$
- चाप की लंबाई(AB) = कोण × त्रिज्या , (जहाँ कोण रेडियन में होते हैं।)

उदाहरण :- एक वृत्त पर एक चाप, जिसकी लंबाई 19.25 सेमी है, केंद्र पर 18° का कोण बनाता है। वृत्त का क्षेत्रफल कितना है? [π = $\frac{22}{7}$ का प्रयोग करें]
SSC CGL 21/07/2023 (4th shift)

हल :- चाप की लंबाई = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

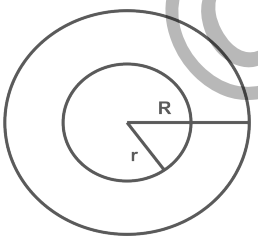
$19.25 = \frac{18}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$19.25 = \frac{1}{10} \times \frac{22}{7} \times r \Rightarrow r = \frac{19.25 \times 10 \times 7}{22} = 61.25$

अत: वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$= \frac{22}{7} \times 61.25 \times 61.25 = 11{,}790.625\ cm^2$

वलय (वृत्तीय रिंग)



यहाँ, R = बड़े वलय की त्रिज्या, r = छोटे वलय की त्रिज्या

- वलय का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$
- दोनों वलयों की परिधि में अंतर = $2\pi R - 2\pi r$

उदाहरण :- दो संकेंद्रित वृत्तों के क्षेत्रफलों के बीच का अंतर 264 cm^2 है। उनकी त्रिज्या के वर्ग के बीच क्या अंतर है? [π = $\frac{22}{7}$ का प्रयोग करें]
SSC CGL Tier II (08/08/2022)
(a) 70cm^2 (b) 140 cm^2 (c) 84 cm^2 (d) 64 cm^2

हल :- माना आंतरिक और बाहरी वृत्त की त्रिज्या क्रमशः r और R है।
प्रश्न के अनुसार,
दो संकेंद्रित वृत्तों के क्षेत्रफलों के बीच अंतर = 264 cm^2
$\Rightarrow \pi R^2 - \pi r^2 = 264 \Rightarrow \pi(R^2 - r^2) = 264$
$\Rightarrow \frac{22}{7} \times (R^2 - r^2) = 264 \Rightarrow R^2 - r^2 = 84\ cm^2$

क्रमिक वृद्धि या कमी

1. यदि किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई a% तथा b% बढ़ा दी जाती है, तो इस आयत का क्षेत्रफल $(a + b + \frac{ab}{100})\%$ से बढ़ जाएगा।

उदाहरण :- एक आयत की लंबाई और चौड़ाई में क्रमशः 8% और 5% की वृद्धि की जाती है। आयत का क्षेत्रफल कितने प्रतिशत बढ़ जाएगा?
SSC CGL 01/12/2022 (1st Shift)
(a) 13.4% (b) 15.4% (c) 12.4% (d) 16.4%

हल :- 8% = $\frac{2}{25}$, 5% = $\frac{1}{20}$

	लम्बाई	:	चौड़ाई	=	क्षेत्रफल
पहली स्थिति	25	:	20	=	500
दूसरी स्थिति	27	:	21	=	567

क्षेत्रफल में % परिवर्तन = $\frac{567 - 500}{500} \times 100 = 13.4\%$

Exam hall approach:- आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई
आयत का क्षेत्रफल आयत की लंबाई और चौड़ाई के गुणनफल के समानुपाती होता है।

क्षेत्रफल में % परिवर्तन = $8 + 5 + \frac{8 \times 5}{100} = 13.4\%$

2. यदि एक आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः a% और b% बढ़ाई और घटाई जाए, तो आयत के क्षेत्रफल में प्रतिशत परिवर्तन होगा

- $(a - b - \frac{ab}{100})\%$

उदाहरण :- एक आयत की लंबाई 25% बढ़ा दी गई और चौड़ाई 20% कम कर दी गई तो आयत के क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत परिवर्तन होगा?
IBPS Clerk Pre 12/12/2020 (2nd Shift)
(a) 10% वृद्धि (b) 0% (c) 15% वृद्धि (d) 25% वृद्धि (e) 20% की कमी

हल :- 25 % = $\frac{1}{4}$, 20% = $\frac{1}{5}$

	लम्बाई	:	चौड़ाई	=	क्षेत्रफल
पहली स्थिति	4	:	5	=	20
दूसरी स्थिति	5	:	4	=	20

किसी भी स्थिति में क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं

Exam hall approach:-

क्रमिक विधि का उपयोग करने पर = $25 - 20 - \frac{25 \times 20}{100}$

= 0 % (क्षेत्रफल में परिवर्तन)

3. यदि किसी द्वि-आयामी आकृति की सभी भुजाओं में a% का परिवर्तन हो, तो क्षेत्रफल में $(2a + \frac{a^2}{100})\%$ का परिवर्तन होगा ।

नोट :- जब भी कोई कमी हो, 'a' के लिए ऋणात्मक मान का प्रयोग करें।

उदाहरण :- यदि एक आयत की प्रत्येक भुजा को 22% बढ़ा दिया जाए, तो इसका क्षेत्रफल बढ़ जाएगा :
SSC CHSL 08/07/2019 (Morning)
(a) 44% (b) 50% (c) 46.65% (d) 48.84%

हल :- क्षेत्रफल में % वृद्धि = $22 + 22 + \frac{22 \times 22}{100}$

$= 44 + \frac{22 \times 22}{100} = 48.84\%$

@apna_pdf

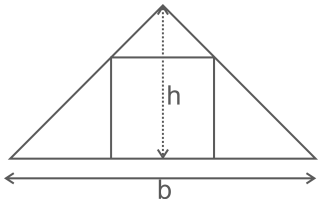
4. यदि एक द्वि-आयामी आकृति की सभी भुजाओं में a % का परिवर्तन (वृद्धि या कमी) हुआ है, तो परिमाप भी a% से बदल जाएगा । वृत्त के मामले में, ऐसे परिवर्तन त्रिज्या (या व्यास) में परिवर्तन के कारण होते हैं ।

5. त्रिज्या 'r' वाले एक वृत्त के भीतर स्थित वर्ग का क्षेत्रफल $2r^2$ होता है

6. त्रिज्या r वाले अर्धवृत्त के भीतर सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल r^2 होगा ।

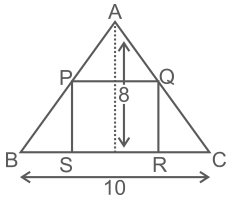
कुछ प्रत्यक्ष परिणाम

1. निम्नलिखित चित्र में:



- वर्ग की भुजा = $\frac{b \times h}{b + h}$

उदाहरण :- दिए गए चित्र में त्रिभुज ABC का आधार और ऊँचाई क्रमशः 10 और 8 सेमी है। PQRS एक वर्ग है तो वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात करें ।

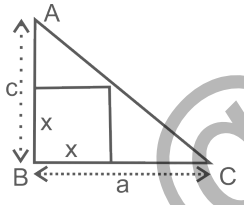


हल :- प्रश्न के अनुसार,

वर्ग की भुजा = $\frac{b \times h}{b + h}$

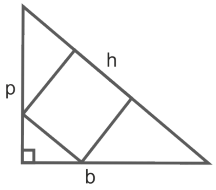
वर्ग की भुजा = $\frac{10 \times 8}{10 + 8} = \frac{40}{9}$ सेमी

2. निम्नलिखित चित्र में:



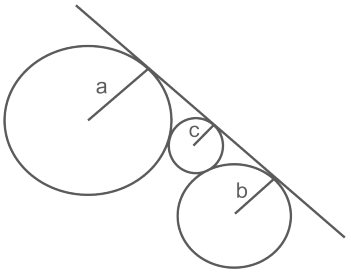
- वर्ग की भुजा, x = $\frac{a \times c}{a + c}$
- त्रिभुज में अंकित वर्ग का क्षेत्रफल =$(\frac{a \times c}{a + c})^2$

3. निम्नलिखित चित्र में:



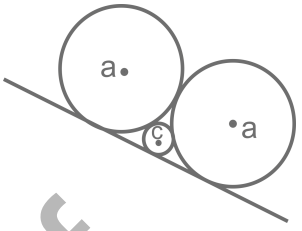
- वर्ग की भुजा = $\frac{p \times b \times h}{p^2 + b^2 + pb}$

4. यदि a, b और c तीन वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं और तीनों वृत्तों में एक उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा है, जैसा कि दिखाया गया है



- $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$

उदाहरण :- दिए गए चित्र में सभी तीन वृत्त एक ही रेखा पर और एक-दूसरे पर भी स्पर्श रेखाएँ हैं। वृत्त a और a की त्रिज्याएँ समान हैं। यदि c की त्रिज्या 20 सेमी के बराबर है, तो a की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



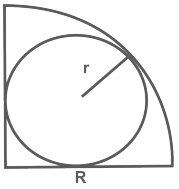
हल :- प्रश्न के अनुसार,

माना वृत्त a की त्रिज्या x सेमी है।

तो, सूत्र:- $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{80}, x = 80$ cm

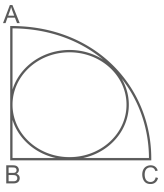
5. निम्नलिखित चित्र में



- $r = (\sqrt{2} - 1)R$

उदाहरण :- यदि ABC एक चौथाई वृत्त है और इसमें एक वृत्त अंकित है और यदि AB = 24 सेमी है, तो छोटे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

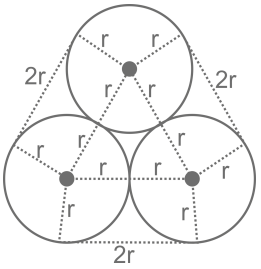
हल :-



छोटे वृत्त की त्रिज्या= $(\sqrt{2} - 1)R$

$\Rightarrow (\sqrt{2} - 1)24$

6. निम्नलिखित चित्र में



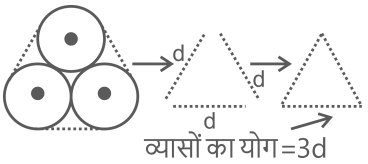
- धागे की लंबाई = 2πr + 3 × 2r = 2r (Π + 3)

@apna_pdf

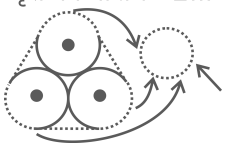
उदाहरण :- 6 सेमी त्रिज्या वाले तीन वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हुए रखे गए हैं। इन तीन घेरों के चारों ओर डोरी कसकर बंधी हुई है। डोरी की लंबाई क्या है ?

SSC CGL 03/12/2022 (2nd Shift)

हल :-



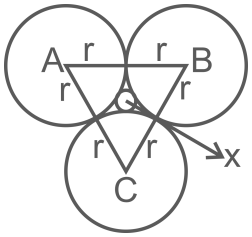
वृत्त की परिधि = 2πr



डोरी की लंबाई = 2r (Π + 3)

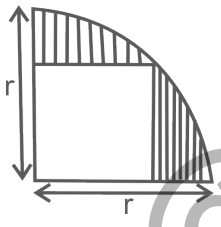
डोरी की लंबाई = 2 × 6 + (π + 3) = 36 + 12π

7. यदि 'r' 3 समान वृत्तों की त्रिज्या है, तो सभी 3 वृत्तों को छूने वाले वृत्त की त्रिज्या (x) इस प्रकार है:



- $x = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times r$

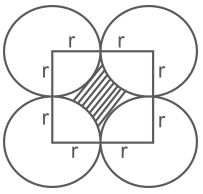
8. निम्नलिखित चित्र में



- वर्ग की भुजा = $\frac{r}{\sqrt{2}}$
- वर्ग का क्षेत्रफल = $(\frac{r}{\sqrt{2}})^2$
- छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = चतुर्थांश का क्षेत्रफल - वर्ग का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{4}\pi r^2 - (\frac{r}{\sqrt{2}})^2$

9. निम्नलिखित चित्र में:



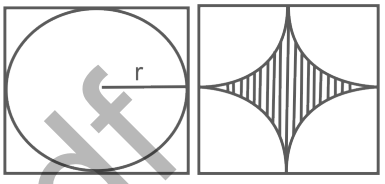
- छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल - एक वृत का क्षेत्रफल

= $(2r)^2 - \pi r^2 = 4r^2 - \frac{22}{7}r^2 = r^2(4 - \frac{22}{7}) = \frac{6}{7}r^2$

छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{6}{7}r^2$

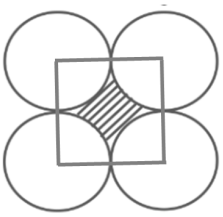
जहां, r = प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या

10. निम्नलिखित चित्र में:



- छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल - एक पूर्ण वृत्त का क्षेत्रफल

उदाहरण:- दिए गए चित्र में यदि वृत्त की त्रिज्या 28 सेमी है, तो छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल:- छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल - एक पूर्ण वृत्त का क्षेत्रफल

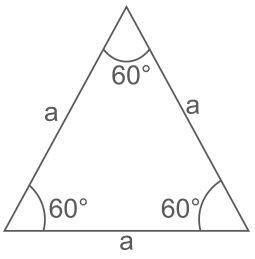
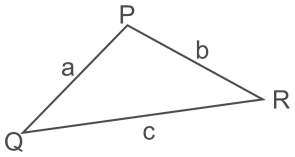
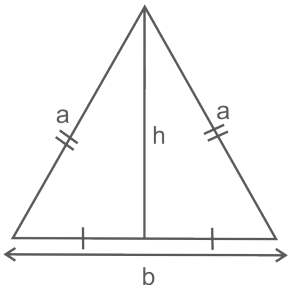
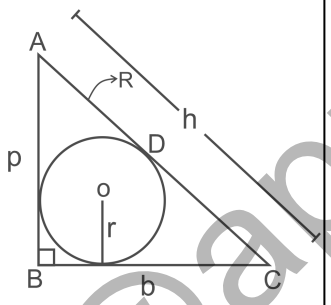
$\Rightarrow 56^2 - \frac{22}{7} \times 28 \times 28 = 672\ cm^2$

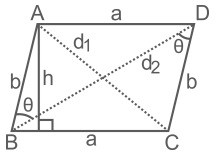
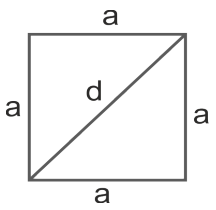
Exam hall approach:-

छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{6}{7}r^2 = \frac{6}{7} \times 28 \times 28 = 672\ cm^2$

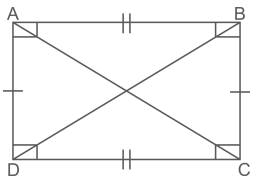
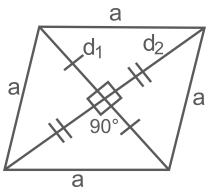
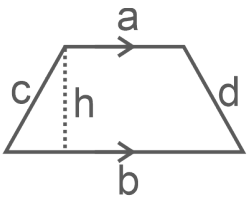
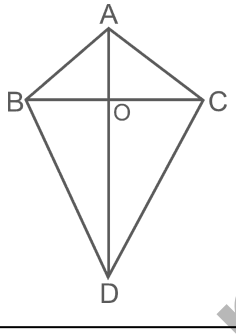
@apna_pdf

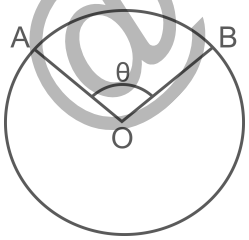
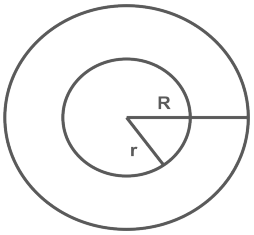
मूल सूत्र तालिका

त्रिभुज	आकृति	क्षेत्रफल	परिमाप
समबाहु त्रिभुज		$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$	$3a$
विषमबाहु त्रिभुज		$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जहाँ, अर्ध-परिमाप $(s) = \frac{a+b+c}{2}$	$a + b + c$
समद्विबाहु त्रिभुज		$\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$	$a + a + b = (2a + b)$
समकोण त्रिभुज		$\frac{1}{2} \times b \times p$	$p + b + h$

चतुर्भुज	आकृति	क्षेत्रफल	परिमाप	विकर्ण
समान्तर चतुर्भुज		आधार × ऊंचाई	2 (a + b)	$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$
वर्ग		$(\text{भुजा})^2 = a^2 = \frac{d^2}{2}$	4 × भुजा = 4a	$a\sqrt{2}$

@apna_pdf

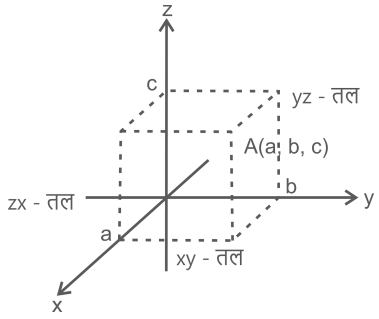
आयत		लंबाई × चौड़ाई	2 (L + B)	$\sqrt{L^2 + B^2}$
समचतुर्भुज	 भुजा (a) = $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^{\,2} + d_2^{\,2}}$	$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$	4 × भुजा = 4a	$4a^2 = d_1^{\,2} + d_2^{\,2}$
समलम्ब चतुर्भुज		$\frac{1}{2}$ × ऊंचाई × समानांतर भुजाओं का योग या $\frac{1}{2} \times h \times (a + b)$	भुजाओं का योग	
पतंग		$\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$	2 (a + b)	

वृत्त	आकृति	क्षेत्रफल	परिधि
वृत्त		πr^2	$2\pi r$
वृत्तीय रिंग		$\pi(R^2 - r^2)$	दोनों वलयों की परिधि में अंतर $2\pi R - 2\pi r$

@apna_pdf

क्षेत्रमिति (3D)
[आयतन]

जिन वस्तुओं या आकृतियों के तीन आयाम i.e. x,y,z होते हैं उन्हें 3D वस्तु या आकृति कहा जाता है



महत्वपूर्ण शर्तें :-

परिमाप	परिधि आकृति के चारों ओर की कुल दूरी या किसी बंद आकृति की सीमा की लंबाई है।
क्षेत्रफल	एक द्वि-आयामी आकृति द्वारा घेरी गई जगह की मात्रा है। इसे वर्ग इकाई में व्यक्त किया जाता है।
सतह का क्षेत्रफल	सतही क्षेत्रफल किसी 3D वस्तु की सतहों द्वारा घेरा गया कुल क्षेत्रफल है। इन्हें दो भागों में वर्गीकृत किया गया है - घुमावदार या पार्श्व सतह का क्षेत्र और कुल सतह का क्षेत्र।
आयतन	आयतन एक 3D आकृति द्वारा घेरी गई जगह की मात्रा है। इसे घन मीटर में व्यक्त किया जाता है।
पार्श्व सतह का क्षेत्रफल	4 दीवारों का क्षेत्रफल.

महत्वपूर्ण इकाइयों का परिवर्तन

- 1मीटर^3 = 1000 लीटर
- 1 लीटर = 1000 सेमी^{3}
- 1 हेक्टेयर = 10000 m^2
- 1 एकड़ = 4046.86 ≈ 4047 m^2

उदाहरण :- एक घनाभ के आकार की पानी की टंकी 12 m लंबी, 9m चौड़ी और 7.5 m गहरी है। इसमें कितने लीटर पानी आ सकता है?
SSC CHSL 08/08/2023 (1st Shift)
(a) 840000 (b) 805000 (c) 780000 (d) 810000
हल :- $1m^3$ = 1000 लीटर
घनाभ का आयतन = l × b × h = 12 × 9 × 7.5
= 810m^3 = 810000 लीटर

कुछ अन्य महत्वपूर्ण इकाई परिवर्तन

किलोमीटर	किलोलीटर	किलोग्राम
×10↓↑÷10	×10↓↑÷10	×10↓↑÷10
हेक्टोमीटर	हेक्टोलीटर	हेक्टोग्राम
×10↓↑÷10	×10↓↑÷10	×10↓↑÷10
डेकामीटर	डेकालीटर	डेकाग्राम
×10↓↑÷10	×10↓↑÷10	×10↓↑÷10
मीटर	लीटर	ग्राम
×10↓↑÷10	×10↓↑÷10	×10↓↑÷10
डेसीमीटर	डेसीलीटर	डेसीग्राम
×10↓↑÷10	×10↓↑÷10	×10↓↑÷10
सेंटीमीटर	सेंटीलीटर	सेंटीग्राम
×10↓↑÷10	×10↓↑÷10	×10↓↑÷10
मिलीमीटर	मिलीलीटर	मिलीग्राम

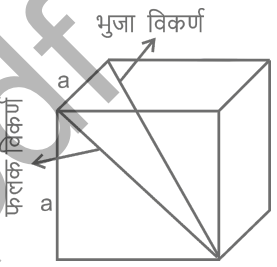
उदाहरण 1 :- 10 किमी को मीटर , सेमी और मिमी में बदलें?
हल :- 10 किमी = 10 × 1000 = 10000 मीटर
10 किमी = 10 × 100000 = 10 × 10^5 सेमी
10 किमी = 10 × 10^6 mm

उदाहरण 2 :- 10 मिमी को किमी, सेमी और मीटर में बदलें?
हल :- 10 मिमी = $\frac{10}{10^6}$ = 10^{-5} km
10 मिमी = $\frac{10}{10}$ = 1 सेमी
10 मिमी = $\frac{10}{10^3}$ = 10^{-2} मीटर

त्रि - आयामी आकृतियाँ एवं सूत्र

घन

घन एक त्रि-आयामी आकृति है जिसकी सभी भुजाएँ समान होती हैं और 6 फलक, 8 शीर्ष और 12 किनारे होते हैं।

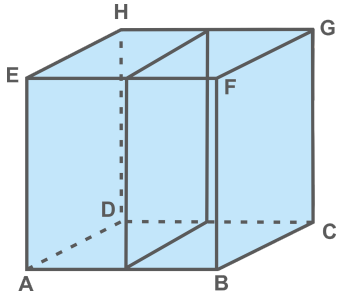


- आयतन = a^3
- प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल = a^2
- पार्श्व सतह क्षेत्र = $4a^2$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$
- फलक का विकर्ण = $a\sqrt{2}$
- घन का विकर्ण = $a\sqrt{3}$
- सभी किनारों का योग = 12a
  यंहा, a = भुजा की लम्बाई ।

उदाहरण :- एक घन का आयतन 2.197 cm³ है। घन की भुजा(cm) ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 19/05/2023 (Morning)
(a) 1.3 (b) 1.4 (c) 1.1 (d) 1.2
हल :- माना घन की भुजा = a cm
प्रश्न के अनुसार,
घन का आयतन (a^3) = 2.197
a = $\sqrt[3]{2.197}$ = 1.3 सेमी

घन को काटना :-

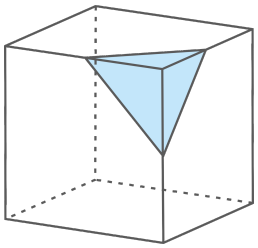
1). घन को क्षैतिज या लंबवत रूप से एक तरफ से काटना, फिर एक कट से दो नई सतहें जुड़ जाती हैं



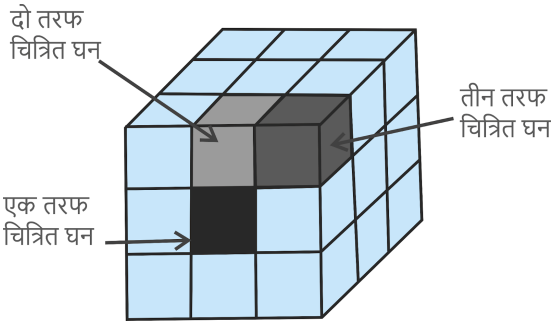
@apna_pdf

1 कट से क्षेत्रफल $2a^2$ बढ़ जाता है

2). कोने पर घन काटने से 2 नए त्रिकोणीय सतह क्षेत्र जुड़ते हैं (पिरामिड)



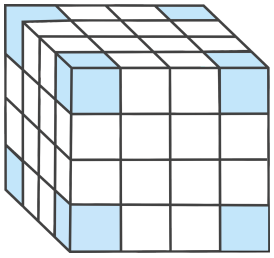
चित्रित फलकों के घनों की संख्या ज्ञात करने का सूत्र :-



0 भुजा से रंगे हुए घनों की संख्या = $(n - 2)^3$
1 भुजा से रंगे हुए घनों की संख्या = $(n - 2)^2 \times 6$
2 भुजाओं पर रंगे हुए घनों की संख्या = $(n - 2) \times 12$
3 भुजाओं पर रंगे हुए घनों की संख्या = 8 (हमेशा)
जहाँ $n = \frac{\text{बड़े घन की लंबाई}}{\text{प्रत्येक छोटे घन की लंबाई}}$

उदाहरण :- 125 सेमी भुजा वाले एक घन को सभी सतहों पर लाल रंग से रंगा जाता है और फिर प्रत्येक 25 सेमी भुजा वाले छोटे घनों में काट दिया जाता है। ऐसे छोटे घनों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके कम से कम दो फलक रंगे हुए हों।
SSC CGL 12/04/2022 (Evening)
(a) 48 (b) 36 (c) 44 (d) 52
हल :- दिया गया है: बड़े घन की भुजा = 125 सेमी
प्रत्येक छोटे घन की भुजा = 25 सेमी
$n = \frac{125}{25} = 5$
हम जानते हैं कि, दो भुजाओं वाले रंगे हुए घनों की संख्या = 12 (n - 2)
= 12 (5 - 2) = 36
तथा 3 भुजाओं पर रंगे हुए घनों की संख्या = 8 (हमेशा)
तो ऐसे छोटे घनों की संख्या जिनके कम से कम दो फलक रंगे हुए हों
= 36 + 8 = 44

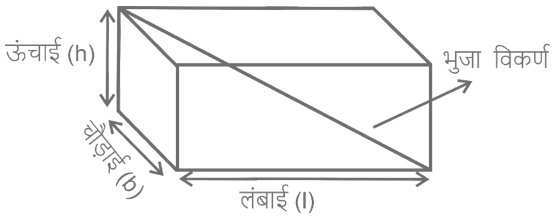
उदाहरण :- 80 सेमी भुजा वाले एक घन को सभी सतहों पर पीला रंग दिया जाता है और फिर 8 सेमी भुजा वाले छोटे घनों में काट दिया जाता है। उन छोटे घनों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके तीनों फलक रंगे हुए हैं।
SSC CGL 12/04/2022 (Afternoon)
(a) 32 (b) 28 (c) 8 (d) 64
हल :-



एक घन को सभी फलकों से रंगा जाता है और फिर उसे n संख्या के घनों में काटा जाता है, उसके तीन फलकों पर हमेशा 8 छोटे घन रंगे होंगे।
3 पृष्ठ रंगे हुए घनों की संख्या = 8 (हमेशा)

घनाभ

एक आयताकार ठोस, जो त्रि-आयामी होता है, घनाभ कहलाता है ।

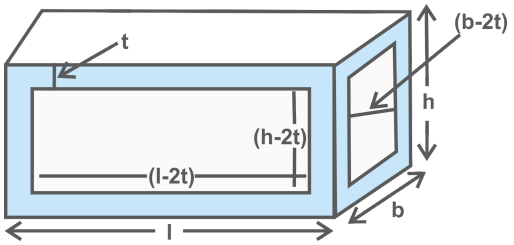


- आयतन = $l \times b \times h$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + lh)$
- पार्श्व सतही क्षेत्रफल = $2(l + b) \times h$
- फलक का विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2}$ या $\sqrt{l^2 + h^2}$
- घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$
- घनाभ का आयतन = $\sqrt{a \times b \times c}$
  (यहाँ a, b और c तीन फलकों का क्षेत्रफल हैं)

उदाहरण :- एक घनाभ के तीन आसन्न फलकों का क्षेत्रफल 32 सेमी^{2}, 2 सेमी^{2} और 48 सेमी^{2}। घनाभ का आयतन (सेमी^{3} में) क्या है?
SSC CGL 04/06/2019 (Evening)
(a) 192 (b) 256 (c) 288 (d) 128
हल :- घनाभ का आयतन = $\sqrt{a \times b \times c}$
यहाँ (a, b और c तीन फलकों का क्षेत्रफल)
घनाभ का आयतन = $\sqrt{32 \times 24 \times 48}$ = 192 cm^3

डिब्बा (बॉक्स)

एक बॉक्स का आकार घन या घनाभ जैसा होता है। बाक्स का आंतरिक आयतन इसकी क्षमता दर्शाता है।



- खुले बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल
  = 2 (लंबाई + चौड़ाई) × ऊंचाई + लंबाई × चौड़ाई
  = $2(l + b) \times h + l \times b$
- बॉक्स की धारिता/ क्षमता
  = $(l - 2t)(b - 2t)(h - 2t)$;
  जहाँ, t = बॉक्स की मोटाई
- बॉक्स में लगी सामग्री का आयतन
  = बाह्य आयतन - आंतरिक आयतन (या धारिता)
  = $lbh - [(l - 2t)(b - 2t)(h - 2t)]$

उदाहरण :- एक स्विमिंग पूल की लंबाई 40 मी, चौड़ाई 30 मी और गहराई 2.2 मीटर है । 25 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से इसके तल तथा इसकी चारों दीवारो पर सीमेंट चढ़ाने की लागत ज्ञात करें ।
SSC CPO 16/03/2019 (Afternoon)
(a) Rs.43,980 (b) Rs.37540 (c) Rs.34260 (d) Rs.37700

@apna_pdf

हल :- तल तथा इसकी चारों दीवारो पर सीमेंट चढ़ाने का कुल क्षेत्रफल = $40 \times 30 + 2(40 \times 2.2 + 30 \times 2.2) = 1508\ m^2$
कुल लागत = 1508 × 25 = 37700 रुपये

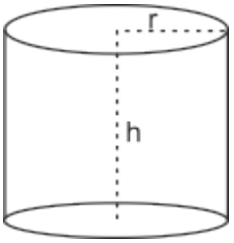
कमरा (रूम)

एक आयताकार कमरे में चार दीवारें (सतहें) हैं और विपरीत दीवारों का क्षेत्रफल बराबर है।

- दीवारों का कुल क्षेत्रफल $= 2(l + b) \times h$
- कमरे का कुल आयतन $= l \times b \times h$
- छत या फर्श का क्षेत्रफल $= l \times b$

उदाहरण :- एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 10 मीटर, 8 मीटर और 6 मीटर है। ₹7.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी कराने की लागत ज्ञात कीजिए।
SSC CGL 24/07/2023 (2nd shift)
(a) Rs.2220 (b) Rs.1850 (c) Rs.2150 (d) Rs.2000
हल :- **दिया गया है,** लंबाई = 10 मीटर,
चौड़ाई = 8 मीटर, ऊँचाई = 6 मीटर
चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 (l + b) × h
= 2(10 + 8) × 6 = 216 m^2
छत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = 10 × 8 = 80m^2
दीवारों और छत को सफेद करने की लागत = (216 + 80) × 7.5
= Rs. 2,220

बेलन



- बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई = $\pi r^2 h$
- पार्श्व / वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई = $2\pi rh$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल + दोनों वृत्तों का क्षेत्रफल
  $= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$
- जब आयताकार शीट को उसकी लंबाई के साथ मोड़ा जाता है तो लंबाई, बेलन के आधार की परिधि बन जाती है और चौड़ाई, बेलन की ऊंचाई बन जाती है।

उदाहरण :- एक बेलन का पार्श्व क्षेत्रफल 3168 सेमी^{2} है और इसकी ऊँचाई 48 सेमी है। आयतन ज्ञात कीजिये.
SSC CGL 19/07/2023 (2nd shift)
(a) 5244 cm^3 (b) 5544 cm^3 (c) 5644 cm^3 (d) 16632 cm^3
हल :- बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$
प्रश्न के अनुसार,

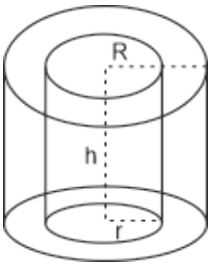
$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 48 = 3168$

$r = \frac{3168 \times 7}{2 \times 22 \times 48} = \frac{21}{2}$ सेमी

अब, बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times 48 = 16632$ सेमी^{3}

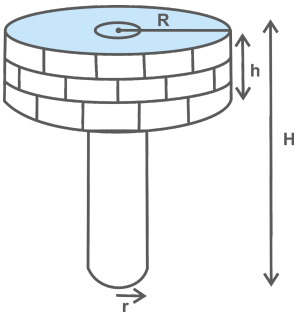
खोखला बेलन



- खोखले बेलन का आयतन $= \pi(R^2 - r^2)h$
- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi(R + r)h$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi(R + r)h + 2\pi(R^2 - r^2)$
  $= 2\pi(R + r)\{h + R - r\}$
  जहाँ, R = खोखले बेलन की बाहरी त्रिज्या, r = खोखले बेलन की आतंरिक त्रिज्या, h = ऊंचाई

उदाहरण :- 24 सेमी ऊंचाई और 1 सेमी मोटाई वाले खोखले बेलन के निर्माण में प्रयुक्त सामग्री का आयतन 96π है आंतरिक और बाह्य त्रिज्या का योग क्या है ?
RRB JE 24/05/2019 (Evening)
(a) 7 cm (b) 3 cm (c) 4 cm (d) 5 cm
हल :- दिया गया है :- h = 24 cm,
मोटाई (R - r) = 1 cm
हम जानते हैं कि खोखले बेलन का आयतन
= π(R² - r²) × h ⇒ π [(R + r) (R - r)] × h = 96 π
∵ { a² - b² = (a + b) (a - b) }
⇒ (R + r) × 1 × 24 = 96 ⇒ (R + r) = $\frac{96}{24}$ = 4cm

तटबंध



बेलनाकार कुएं का आयतन = खोखले बेलनाकार तटबंध का आयतन
$\Rightarrow \pi r^2 H = \pi [R^2 - r^2] \times h \Rightarrow r^2 H = [R^2 - r^2] \times h$

उदाहरण :- 2 मीटर त्रिज्या का एक कुआँ 16.8 मीटर गहरा खोदा गया है। इससे निकाली गई मिट्टी को कुएं के चारों ओर समान रूप से फैलाकर 48 सेमी ऊंचा तटबंध बनाया जाता है। तटबंध की चौड़ाई (मीटर में) क्या है?
NTPC CBT II (13/06/2022) 2nd Shift
(a) 8 (b) 10 (c) 9.6 (d) 8.4
हल :- त्रिज्या (r) = 2 मीटर
ऊंचाई = 16.8 मीटर
माना तटबंध की त्रिज्या = R
तटबंध की चौड़ाई = R - r
प्रश्न के अनुसार,

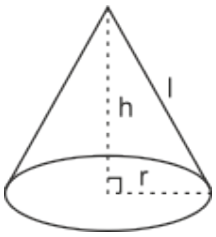
$\frac{22}{7} \times 2 \times 2 \times 16.8 = \frac{22}{7} \times (R^2 - 4) \times 0.48$

$R^2 = 144 \Rightarrow R = 12$
तटबंध की चौड़ाई = R - r = 12 - 2 = 10 मी.

@apna_pdf

शंकु

गोल आधार और नुकीले शिखर वाला ठोस आकृति .



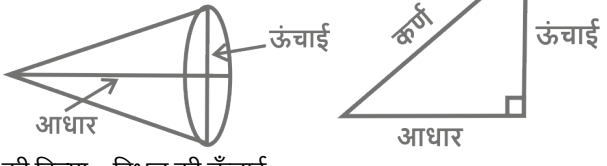
- आयतन = $\frac{1}{3}$ × आधार क्षेत्रफल × ऊँचाई = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
- तिरछी ऊँचाई $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$
- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$
- समकोण त्रिभुज को उसकी ऊंचाई के परितः घुमाने से बना शंकु:

उदाहरण :- एक शंकु के आधार का क्षेत्रफल 186.34 सेमी^{2} है यदि शंकु की ऊंचाई उसकी त्रिज्या का नौ - सातवां है, तो इसका आयतन (सेमी^{3} में) क्या है?
DDA JE (Civil) 01/04/2023 (Morning)
(a) 614.922 (b) 611.657 (c) 612.754cm^3 (d) 613.841
हल :- शंकु के आधार का क्षेत्रफल = πr^2 = 186.34 सेमी^{2},
$r^2 = \frac{186.34 \times 7}{22}$ = 59.29 सेमी^{2} = r = 7.7 सेमी,
शंकु की ऊँचाई = $\frac{9 \times 7.7}{7}$ = 9.9 सेमी,
शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7.7 \times 7.7 \times 9.9$
= 614.922 सेमी^{3}

उदाहरण :- एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आधार की परिधि 88 सेमी है। यदि शंकु की ऊँचाई 28 सेमी है, तो शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है?
SSC CHSL 09/03/2023 (2nd Shift)
(a) 670$\sqrt{3}$ cm^2 (b) 616$\sqrt{5}$ cm^2 (c) 627$\sqrt{3}$ cm^2 (d) 661$\sqrt{5}$ cm^2
हल :- प्रश्न के अनुसार,
शंकु के आधार की परिधि($2\pi r$) = 88 सेमी
तब, r = 88 × $\frac{7}{22} \times \frac{1}{2}$ = 14 सेमी
शंकु की तिरछी ऊंचाई $(l) = \sqrt{(r)^2 + (h)^2} = \sqrt{(14)^2 + (28)^2}$
= $\sqrt{980}$ = 14$\sqrt{5}$
अत: शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ($\pi r l$) = $\frac{22}{7} \times 14 \times 14\sqrt{5}$
= 616$\sqrt{5}$ cm^2

घूमते हुए त्रिभुजों द्वारा शंकुओं का निर्माण

1). आधार के अनुदिश समकोण त्रिभुज का घूर्णन :-

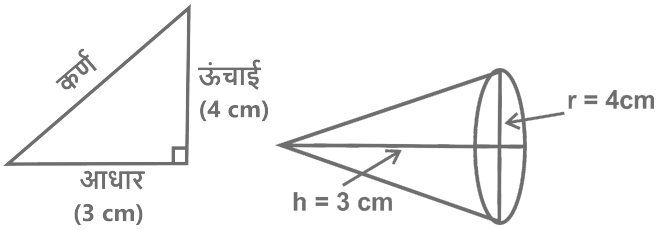


शंकु की त्रिज्या = त्रिभुज की ऊँचाई
शंकु की ऊँचाई = त्रिभुज का आधार

जहाँ : त्रिज्या = ऊंचाई, ऊंचाई = आधार और तिरछी ऊंचाई = कर्ण

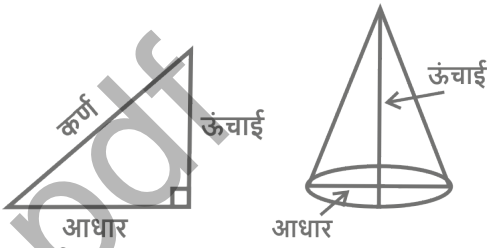
संकेत: शंकु बनाने के लिए, जिस भुजा से त्रिभुज को घुमाया जाता है, वह सदैव स्थिर रहती है।

उदाहरण :- ऊंचाई 4 सेमी और आधार 3 सेमी वाले एक समकोण त्रिभुज को शंकु बनाने के लिए त्रिभुज की ऊंचाई के चारों ओर घुमाया जाता है। बने शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ रखने पर)
हल :- प्रश्न के अुसार,



शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (4)^2 \times 3 = \frac{352}{7}$ सेमी^{3}

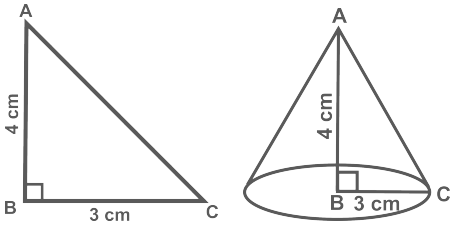
2). समकोण त्रिभुज की ऊँचाई के अनुदिश घूर्णन :-



शंकु की त्रिज्या = त्रिभुज का आधार
शंकु की ऊँचाई = त्रिभुज की ऊँचाई

जहां: त्रिज्या = आधार, ऊंचाई (शंकु) = ऊंचाई (त्रिकोण) और तिरछी ऊंचाई = कर्ण

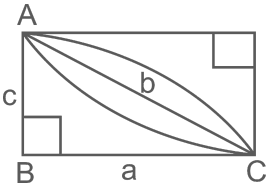
उदाहरण :- ऊंचाई 4 सेमी और आधार 3 सेमी वाला एक समकोण त्रिभुज को एक शंकु बनाने के लिए त्रिभुज की ऊंचाई के चारों ओर घुमाया जाता है। बने शंकु का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
($\pi = \frac{22}{7}$ रखने पर)
हल :-



प्रश्न के अनुसार,
एक शंकु बनाने के लिए त्रिभुज की ऊंचाई को घुमाया जाता है।
फिर, शंकु की ऊँचाई = 4 सेमी और शंकु की त्रिज्या = 3 सेमी
⇒ शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3)^2 \times 4 = \frac{264}{7}$ सेमी^{3}
त्रिक (3 , 4 ,5) का प्रयोग करने पर = शंकु की तिरछी ऊंचाई = 5 सेमी
⇒ शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l = \frac{22}{7} \times 3 \times 4 = \frac{264}{7}$ सेमी^{2}

3). कर्ण के अनुदिश समकोण त्रिभुज का घूर्णन :-

जब दिए गए त्रिभुज को AC के अनुदिश घुमाया जाता है,



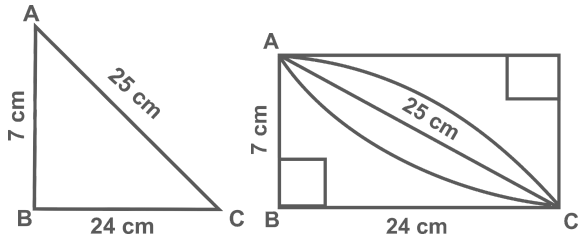
@apna_pdf

यहां, शंकु का व्यास = 'b', और 2 अलग-अलग तिरछी ऊंचाइयां = 'a' और 'c'.

2 शंकुओं के आयतन का योग = $\frac{1}{3}\pi\frac{(ac)^2}{b}$

उदाहरण :- एक समकोण त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी और 24 सेमी हैं, को उसके कर्ण के अनुदिश घुमाया जाता है। बनी आकृति का कुल आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :- प्रश्न के अनुसार,



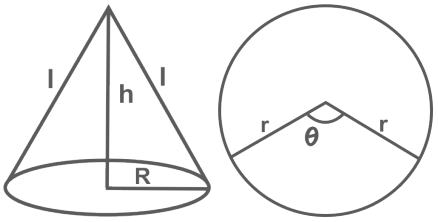
त्रिक (7, 24, 25) का प्रयोग करने पर = शंकु का व्यास = 25 सेमी
और दो अलग-अलग तिरछी ऊंचाई 7 सेमी और 24 सेमी

2 शंकुओं का कुल आयतन = $\frac{1}{3}\pi\frac{(ac)^2}{b}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{(7 \times 24)^2}{25}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{(49 \times 576)}{25} = 1182.72$ सेमी ^{3}

शंकु बनाने के लिए त्रिज्यखंड का घूर्णन :-

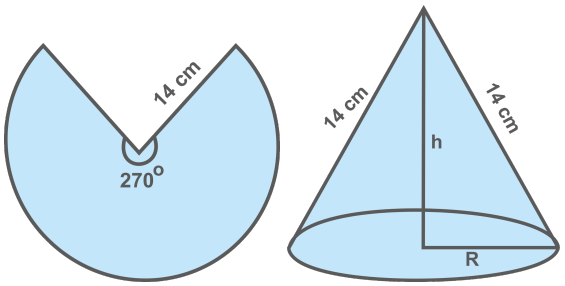


$R = \frac{\theta}{360} r$

शंकु की तिरछी ऊंचाई (L) = त्रिज्यखंड की त्रिज्या (r)
शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

उदाहरण :- नीचे दिया गया चित्र 14 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त का एक त्रिज्यखंड दर्शाता है। त्रिज्यखंड का कोण 270° है। एक शंकु बनाने के लिए त्रिज्याखंड को मोड़ा जाता है। शंकु की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल :-

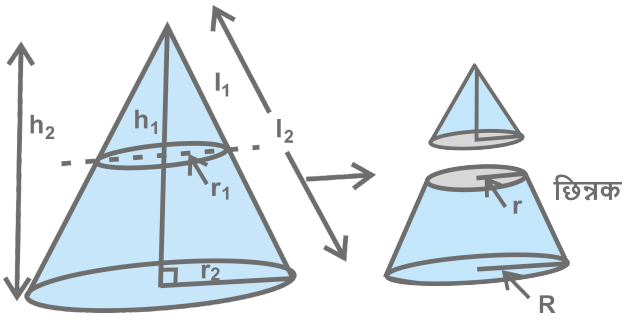


प्रश्न के अनुसार,

शंकु की त्रिज्या (R) $= \frac{\theta}{360} \times r$(एक त्रिज्य खण्ड की त्रिज्या)

$= \frac{270}{360} \times 14 = 10.5$ सेमी

शंकु के टुकडे करने पर मिले परिणाम



समानता के गुण का प्रयोग करने पर, हमें निम्नलिखित परिणाम मिलते हैं:

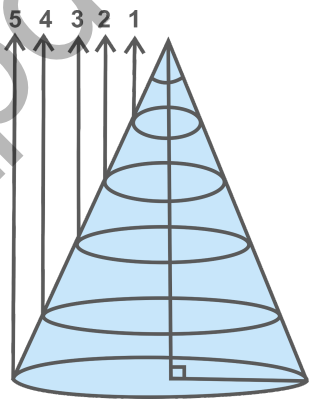
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

दो शंकुओं अर्थात छोटे और बड़े को ध्यान में रखते हुए, हमारे पास है:
छोटे और बड़े शंकु के पृष्ठीय क्षेत्र का अनुपात

$= \frac{\text{छोटा शंकु पृष्ठीय क्षेत्र}}{\text{बड़ा शंकु पृष्ठीय क्षेत्र}} = \frac{\Pi r_1 l_1}{\Pi r_2 l_2} = (\frac{r_1}{r_2})^2 = (\frac{h_1}{h_2})^2 = (\frac{l_1}{l_2})^2$

2 शंकुओं के आयतन का अनुपात = $\frac{\text{छोटे शंकु का आयतन}}{\text{बड़े शंकु का आयतन}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2}$

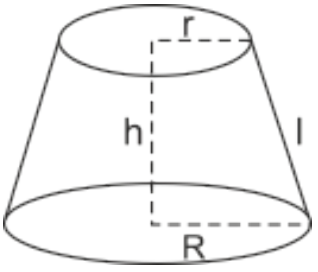
निम्नलिखित चित्र के लिए :



5 भागों के पृष्ठीय क्षेत्र का अनुपात इस प्रकार है:
$1^2 : 2^2 - 1^2 : 3^2 - 2^2 : 4^2 - 3^2 : 5^2 - 4^2 = 1 : 3 : 5 : 7 : 9$
5 भागों के आयतन का अनुपात इस प्रकार है:
$1^3 : 2^3 - 1^3 : 3^3 - 2^3 : 4^3 - 3^3 : 5^3 - 4^3 = 1 : 7 : 19 : 37 : 61$

शंकु का छिन्नक

यदि किसी शंकु को उसके आधार के समान्तर समतल द्वारा काटा जाए, जिससे शंकु दो भागों में विभाजित हो जाए: ऊपरी भाग और निचला भाग, तो निचले भाग को छिन्नक कहा जाता है।



- तिरछी ऊंचाई (l) = $\sqrt{h^2 + (R - r)^2}$
- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi(R + r)l$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$
  $= \pi\{(R + r)(l + R^2 + r^2)\}$
- आयतन = $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR)$

@apna_pdf

उदाहरण :- 7 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के सिरों की त्रिज्याएँ 5 cm और 3 cm है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए जो दशमलव के एक स्थान तक सही हो। ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)

SSC CGL 12/12/2022 (2nd Shift)

(a) 345.6 cm³ (b) 359.3 cm³ (c) 379.3 cm³ (d) 369.3 cm³

हल : छिन्नक का आयतन = $\frac{1}{3} \times \pi \times h(R^2 + r^2 + R \times r)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\,(5^2 + 3^2 + 5 \times 3)$

$= \frac{22}{3}(25 + 9 + 15) = \frac{22 \times 49}{3} = \frac{1078}{3} = 359.3\ cm^3$

उदाहरण :- एक शंकु के ठोस छिन्नक की ऊँचाई 8 cm है। यदि इसके निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 3 cm और 9 cm हैं, तो इसकी तिर्यक ऊँचाई क्या है ?

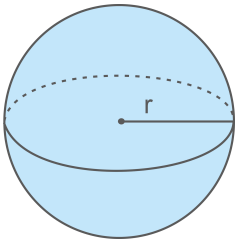
RRB NTPC CBT - I 11/03/2021 (Morning)

(a) 9cm (b) 12 cm (c) 10 cm (d) 15 cm

हल :- तिर्यक ऊँचाई $(L^2) = H^2 + (R - r)^2$

$\Rightarrow L^2 = 8^2 + (9 - 3)^2 \Rightarrow L^2 = 64 + 36 \Rightarrow L^2 = 100 \Rightarrow L = 10$ cm

गोला



- गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

उदाहरण :- यदि किसी गोले का आयतन 24,416.64 सेमी³ है, दशमलव के दो स्थानों तक सही इसका सतह क्षेत्रफल ज्ञात करें। ($\pi = 3.14$ लें)।

SSC CGL 03/12/2022 (1st Shift)

(a) 3069.55 cm^2 (b) 4069.44cm^2

(c) 5069.66 cm^2 (d) 6069.67cm^2

हल :- गोले का आयतन = $\frac{4}{3} \times \pi r^3$

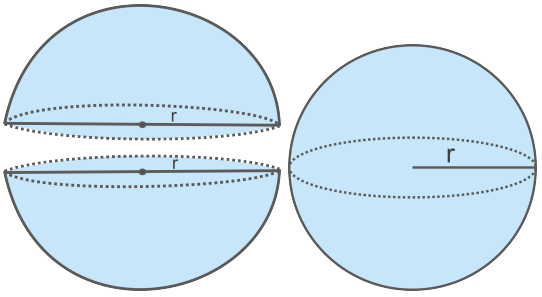
अब, $24416.64 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$

$r^3 = \frac{7776 \times 3}{4} = 5832 \Rightarrow$ r = 18 सेमी

अब, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

= 4 × 3.14 × 18 × 18 ⇒ 4069.44 सेमी²

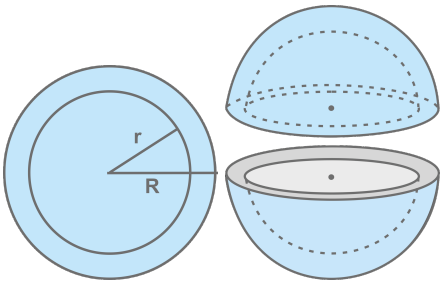
केंद्र से गोले को सममित रूप से काटना :-



- 1 कट से क्षेत्रफल बढ़ता है = $2\pi r^2$

  कुल सतह का क्षेत्रफल = $4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$
- N कट से क्षेत्रफल बढ़ता है = $2\pi r^2 N$

खोखला गोला या गोलाकार खोल



- खोखले गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$
- आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$
- बाह्य पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi R^2$
- खोखले गोलार्ध का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

  = $2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$

  जहां, R = बाहरी त्रिज्या और r = आंतरिक त्रिज्या

उदाहरण :- एक खोखले गोलार्ध का कुल सतह क्षेत्रफल (वर्ग सेमी में) और आयतन (घन सेमी में) ज्ञात करें जिसकी बाहरी त्रिज्या 10 सेमी और आंतरिक त्रिज्या 5 सेमी है।

RRC Group D 06/10/2022 (Afternoon)

हल :- खोखले गोलार्ध का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

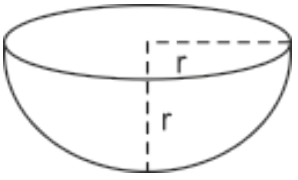
= $2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$

= $2\pi(10^2 + 5^2) + \pi(10^2 - 5^2) = 250\pi + 75\pi = 325\ \pi$ सेमी²

खोखले गोलार्ध का आयतन = $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

= $\frac{4}{3}\pi(10^3 - 5^3) = \frac{4 \times 825}{3}\pi = 1100\pi$ सेमी³

अर्धगोला



- अर्धगोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$
- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$, r = त्रिज्या

उदाहरण :- एक ठोस गोलार्ध का कुल सतह क्षेत्रफल 4158 सेमी² है। इसका आयतन (सेमी³ में) ज्ञात कीजिए।

SSC CPO 05/10/2023 (1st Shift)

(a) 9702 (b) 19404 (c) 1848 (d) 462

हल :- गोलार्ध का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$

$\Rightarrow 3\pi r^2 = 4158 \Rightarrow r^2 = \frac{4158 \times 7}{3 \times 22} \Rightarrow r = 21\ cm$

गोलार्ध का आयतन = $\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21 = 19404\ cm^3$

उदाहरण :- एक गोलार्ध का कुल सतह क्षेत्रफल 64.57 सेमी² है इसका

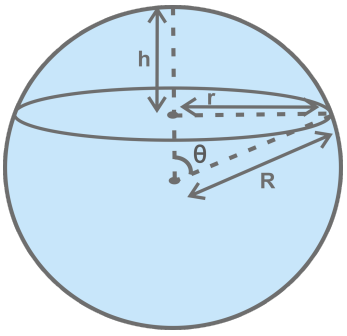
@apna_pdf

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (सेमी^{2}) ज्ञात कीजिए।
SSC CHSL 08/06/2022 (Morning)
(a) 64.57 (b) 53.44 (c) 43.04 (d) 33.04
हल :- एक गोलार्ध का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 64.57 cm^2

$\Rightarrow 3\pi r^2 = 64.57 \Rightarrow 3 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 64.57 \Rightarrow r^2 = 6.848$

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times \frac{22}{7} \times 6.848 = 43.04$ cm^2

गोलाकार टोपी

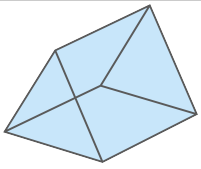
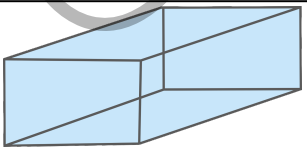
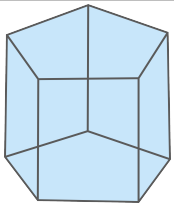
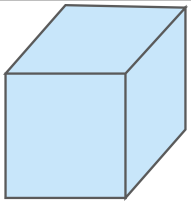


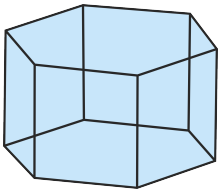
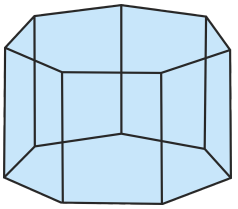
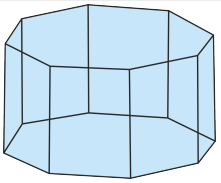
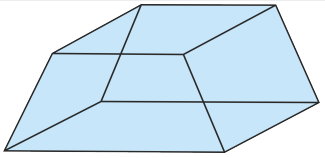
जहां : r = टोपी के आधार की त्रिज्या, R = गोले की त्रिज्या, h = गोलाकार टोपी की ऊंचाई और θ = गोले के केंद्र से टोपी के शीर्ष तथा किरणों के बीच का कोण

	R और h प्रयोग करने पर,	r और h प्रयोग करने पर,	R और θ प्रयोग करने पर,
आयतन	$\frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$	$\frac{\pi h}{6} \times (3r^2 + h^2)$	$\frac{\pi R^3}{3} \times (2 + cos\theta) \times (1 - cos\theta)^2$
क्षेत्रफल	$2\pi Rh$	$\pi(r^2 + h^2)$	$2\pi R^2(1 - cos\theta)$

प्रिज्म

(विभिन्न आकृतियों पर आधारित प्रिज्म)

त्रिकोणीय	आयताकार
 → 5 फलक (2 त्रिकोणीय और 3 आयताकार) → 9 किनारे → 6 शीर्ष	 → 6 फलक (सभी आयताकार) → 12 किनारे → 8 शीर्ष
पंचभुज	**वर्ग**
 → 7 फलक (2 पंचभुज और 5 आयताकार) → 15 किनारे → 10 शीर्ष	 → 6 फलक (2 वर्ग और 4 आयताकार) → 12 किनारे → 8 शीर्ष

षटभुज	सप्तभुज
 → 8 फलक (2 षट्भुज और 6 आयताकार) → 18 किनारे → 12 शीर्ष	 → 9 फलक (2 षट्भुज and 7 आयताकार) → 19 किनारे → 14 शीर्ष
अष्टभुज	**समलम्बाकार**
 → 10 फलक (2 अष्टभुज और 8 आयताकार) → 24 किनारे → 16 शीर्ष	 → 6 फलक (2 समलम्बाकार और 4 आयताकार) → 12 किनारे → 8 शीर्ष

- प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
- पार्श्व सतह का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप × ऊंचाई
- कुल सतह का क्षेत्रफल = पार्श्व सतह का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल और ऊपर की सतह का क्षेत्रफल

उदाहरण :- एक समकोण प्रिज्म का आधार एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा 10 cm है। यदि इस प्रिज्म की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ cm है, तो प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना है?
SSC CGL Tier II (08/08/2022)
(a) $125\sqrt{3}$ (b) $325\sqrt{3}$ (c) $150\sqrt{3}$ (d) $350\sqrt{3}$
हल :- प्रिज्म का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल
= [आधार की परिधि × ऊंचाई] + [2 × आधार का क्षेत्रफल]

$= [(10 + 10 + 10) \times 10\sqrt{3}] + [2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2]$

$= [30 \times 10\sqrt{3}] + 50\sqrt{3} = 300\sqrt{3} + 50\sqrt{3} = 350\sqrt{3}\ cm^2$

उदाहरण :- एक प्रिज्म का आधार 5 सेमी का एक समषट्भुज है। यदि इसकी ऊंचाई $12\sqrt{3}$ सेमी है, तो इसकी आयतन (सेमी^{3} में) है
SSC CGL Tier II (15/11/2020)
(a) 900 (b) 1800 (c) 1350 (d) 675
हल :- समषट्भुज में 6 समबाहु त्रिभुज होते हैं

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

आधार का क्षेत्रफल = 6 × त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{150\sqrt{3}}{4}$
प्रिज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

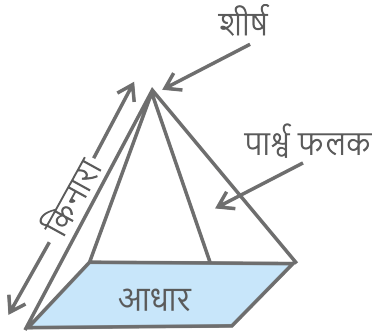
$= \frac{150\sqrt{3}}{4} \times 12\sqrt{3} = 1350\ cm^3$

पिरामिड

नोट :-यदि आधार गोल न हो तो उसे पिरामिड कहा जायेगा। एक पिरामिड के आधार के विभिन्न आकार हो सकते हैं। उदाहरण: वर्गाकार, आयताकार,

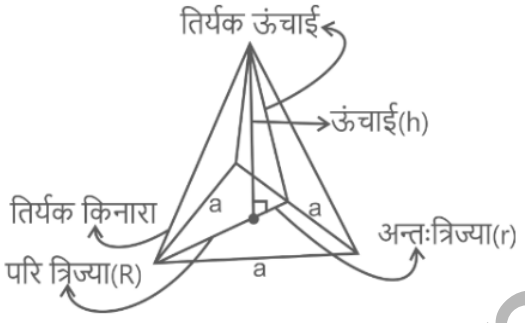
@apna_pdf

त्रिकोणीय आदि।



- पिरामिड का अर्थ है एक ऐसी संरचना जिसमें नियमित बहुभुज का आधार और ढलान वाली भुजाएँ होती हैं जो शीर्ष पर एक बिंदु पर मिलती हैं।
- यदि पिरामिड में इसके आधार पर n भुजीय नियमित बहुभुज हैं तो शीर्षों की कुल संख्या = n + 1 होंगी ।
- आयतन = $\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई
- तिर्यक ऊंचाई (l) = $\sqrt{r^2 + h^2}$
- पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{\text{परिमाप} \times \text{तिर्यक ऊंचाई}}{2}$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

(1) समबाहु त्रिभुजाकार पिरामिड : -



- आयतन = $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times h$
- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 3a \times l$
- तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(\frac{a}{2\sqrt{3}})^2 + h^2}$
- तिर्यक कोर = $\sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{(\frac{a}{\sqrt{3}})^2 + h^2}$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 3al + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

उदाहरण :- एक लम्ब पिरामिड का आधार एक समबाहु त्रिभुज है जिसका क्षेत्रफल $16\sqrt{3}$ वर्ग सेमी है । यदि इसके एक पार्श्व फलक का क्षेत्रफल 30 वर्ग सेमी है, तो इसकी ऊंचाई (सेमी में)ज्ञात करें ।
SSC CGL Tier II (13/09/2019)

(a) $\sqrt{\frac{209}{12}}$ (b) $\sqrt{\frac{739}{12}}$ (c) $\sqrt{\frac{643}{12}}$ (d) $\sqrt{\frac{611}{12}}$

हल :- एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

= $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow 16\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow$ a = 8

पिरामिड की त्रिज्या = त्रिभुज की अन्तःत्रिज्या

= $\frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{8}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ और

$\Rightarrow$ पार्श्व फलक का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × तिर्यक ऊंचाई

$\Rightarrow$ 30 = $\frac{1}{2}$ × 8 × तिर्यक ऊंचाई $\Rightarrow$ तिर्यक ऊंचाई = $\frac{15}{2}$

पिरामिड की ऊंचाई = $\sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(\frac{15}{2})^2 - (\frac{4}{\sqrt{3}})^2}$

= $\sqrt{\frac{611}{12}}$ cm

उदाहरण :- एक पिरामिड का आधार एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 8 cm है। इसका तिर्यक कोर (slant edge) 24 cm है। पिरामिड का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (cm^2 में) कितना है ?
SSC CGL Tier II (06/03/2023)

(a) $(16\sqrt{3} + 24\sqrt{35})$ (b) $(12\sqrt{3} + 24\sqrt{35})$
(c) $(24\sqrt{3} + 36\sqrt{35})$ (d) $(16\sqrt{3} + 48\sqrt{35})$

हल :- पार्श्व सतह क्षेत्र = $\frac{1}{2}$ × आधार का परिमाप × तिरछी ऊँचाई

पिरामिड का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = पार्श्व सतह क्षेत्र + आधार का क्षेत्र

(तिर्यक कोर)^2 = (तिरछी ऊंचाई)^2 + $(\frac{\text{भुजा}}{\sqrt{3}})^2$

$(24)^2$ = (तिरछी ऊंचाई)^2 + $(\frac{8}{\sqrt{3}})^2$

$(24)^2 - (\frac{8}{\sqrt{3}})^2$ = (तिरछी ऊंचाई)^2

$\frac{576 \times 3 - 64}{3}$ = (तिरछी ऊंचाई)^2

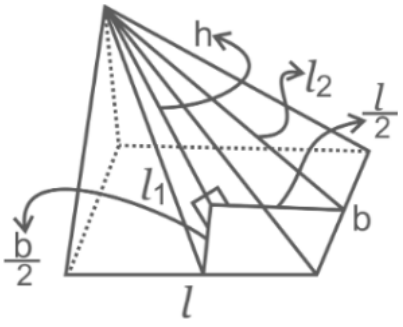
$\sqrt{\frac{1664}{3}}$ = तिरछी ऊंचाई $\Rightarrow \sqrt{\frac{16 \times 104}{3}}$ = तिरछी ऊंचाई

तिरछी ऊँचाई = $4\sqrt{35}$ सेमी

पार्श्व सतह क्षेत्र = $48\sqrt{35}$ सेमी

संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $16\sqrt{3} + 48\sqrt{35}$ सेमी^{2}

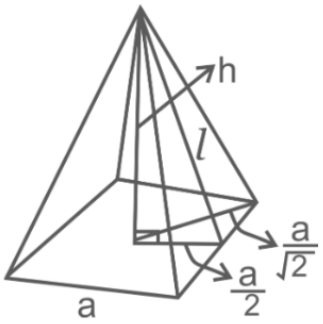
(2) आयताकार पिरामिड :-



- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times \frac{1}{2}l \times l_1 + 2 \times \frac{1}{2}b \times l_2$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = C.S.A + lb
- आयतन = $\frac{1}{3} \times l$b × h
- यहाँ , दो तिरछी ऊंचाई है
- पहली तिरछी ऊंचाई (l_1) = $\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + h^2}$
- दूसरी तिरछी ऊंचाई (l_2) = $\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + h^2}$

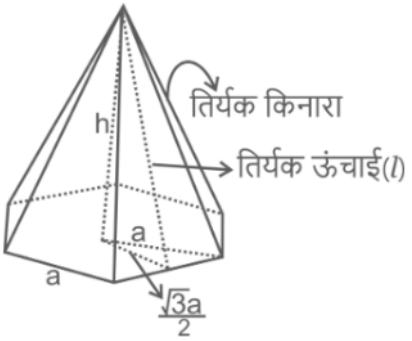
@apna_pdf

(3) वर्गाकार पिरामिड :-



- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4a \times l$
- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4a \times l + a^2$
- आयतन $= \frac{1}{3} \times a^2 \times h$
- तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + h^2}$
- तिर्यक कोर $= \sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 + h^2}$

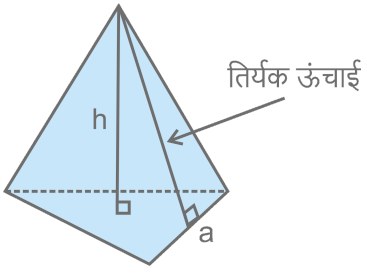
(4) षटकोणीय पिरामिड :-



- वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 6a \times l$
- कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 6a \times l + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
- आयतन $= \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times h$
- तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 + h^2}$
- तिर्यक कोर $= \sqrt{a^2 + h^2}$

समचतुष्फलक

यह **चार समबाहु त्रिभुजों** को जोड़कर बनाई गई एक त्रि-आयामी आकृति है।



- समचतुष्फलक की ऊँचाई (h) $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$
- तिरछी ऊंचाई $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$
- आयतन (V) $= \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊंचाई

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

- पार्श्व सतह क्षेत्र $= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
- कुल सतह का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 4 = \sqrt{3}\,a^2$

उदाहरण :- बॉक्स चतुष्फलक के आकार का है, जिसकी प्रत्येक भुजा $3\sqrt{2}$ सेमी है। दिए गए बॉक्स का आयतन क्या है?

हल :-

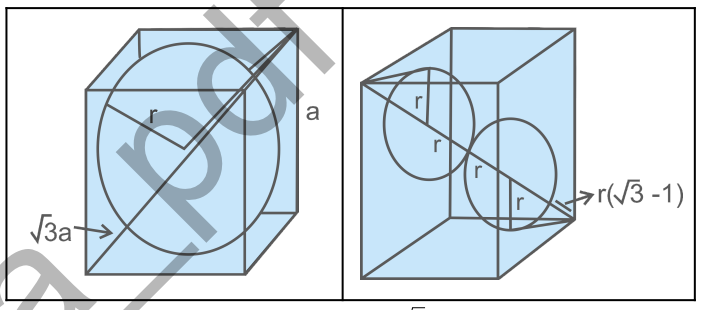
चतुष्फलक की भुजा (a) $= 3\sqrt{2}$

फिर,

चतुष्फलक का आयतन $= \frac{\sqrt{2}}{12}(3\sqrt{2})^3$

$= \frac{\sqrt{2} \times 54\sqrt{2}}{12}\,cm^3 = \frac{54}{6}\,cm^3 = 9\,cm^3$

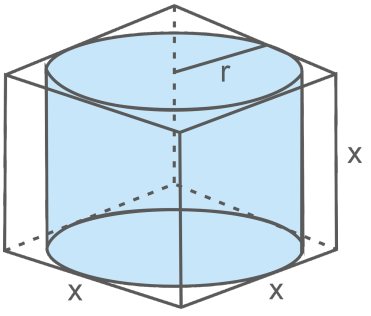
त्रि - आयामी आकृति का कुछ संयोजन



- घन के शीर्ष से गोले की न्यूनतम दूरी $= \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$ (जब एक घन में 1 गोला हो)
- जब एक घन में दो बराबर गोले हों , तब

$\Rightarrow \sqrt{3}a = 2r(1 + \sqrt{3})$

घन के अंदर अधिकतम आकार का बेलन :-



बेलन की त्रिज्या $= \frac{\text{घन का किनारा}}{2} = \frac{x}{2}$

बेलन की ऊँचाई = घन का किनारा

तब,

घन का आयतन : बेलन का आयतन

$\Rightarrow \quad x^3 \quad : \quad \pi(\frac{x}{2})^2 x$

$\Rightarrow \quad 1 \quad : \quad \frac{22}{7} \times \frac{1}{4}$

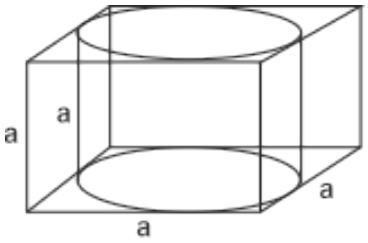
$$\frac{\text{घन का आयतन}}{\text{बेलन का आयतन}} = \frac{14}{11}$$

उदाहरण :- एक ठोस लकड़ी के घन से अधिकतम संभव आकार का एक

@apna_pdf

लम्ब वृत्तीय बेलन काटा जाता है। घन की शेष सामग्री मूल घन का कितना प्रतिशत है ? (π = 3.14)
SSC CPO 13/12/2019 (Morning)
(a) 22.4 (b) 21.5 (c) 22.8 (d) 21.8

हल :-



बेलन का व्यास = a, r = $\frac{a}{2}$ और h = a

घन की शेष सामग्री का मूल घन से प्रतिशत = $\frac{a^3 - \frac{\pi a^3}{4}}{a^3} \times 100$

= $\frac{4-\pi}{4} \times 100 = 0.86 \times 25 = 21.42 \approx 21.5\ \%$

Exam hall approach :- हम वह जानते हैं कि,

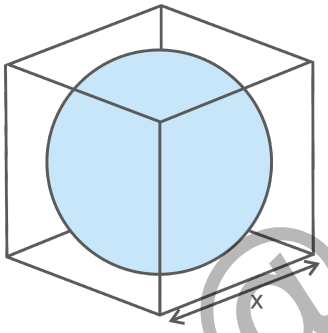
$\frac{\text{घन का आयतन}}{\text{बेलन का आयतन}} = \frac{14}{11}$

प्रश्न के अनुसार,

मूल घन से घन की शेष सामग्री का प्रतिशत = $\frac{3}{14} \times 100$

= 21.42% ≈ 21.5 %

घन के अंदर अधिकतम आयतन का गोला :-



गोले का व्यास (2r) = घन का किनारा = x

घन का आयतन : गोले का आयतन

⇒ x^3 : $\frac{4}{3}\pi(\frac{x}{2})^3$

$\frac{\text{घन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{21}{11}$

उदाहरण :- 3.5 मीटर भुजा वाले घन में बनाए जा सकने वाले सबसे बड़े गोले का आयतन कितना है? ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल :- प्रश्न के अनुसार,

घन का आयतन = $(3.5)^3$ = 42.875 मीटर ^{3}

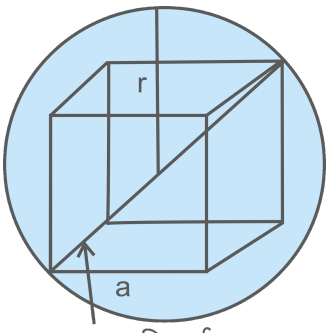
हम वह जानते हैं कि,

$\frac{\text{घन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{21}{11}$

तो, 21 इकाई = 42.875

⇒ 11 इकाई = $\frac{42.875}{21} \times 11$ = 22.45 मीटर ^{3}

गोले के अंदर अधिकतम आकार का घन :-



घन का विकर्ण

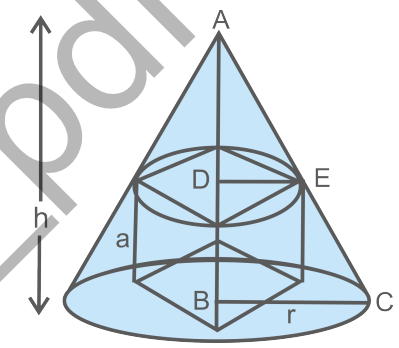
घन का विकर्ण = गोले का व्यास ⇒ $\sqrt{3}$a = 2r ⇒ a = $\frac{2r}{\sqrt{3}}$

गोले का आयतन : घन का आयतन

⇒ $\frac{4}{3}\pi x^3$: $(\frac{2r}{\sqrt{3}})^3$ ⇒ $\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} : \frac{8}{3\sqrt{3}}$

$\frac{\text{गोले का आयतन}}{\text{घन का आयतन}} = \frac{11\sqrt{3}}{7}$

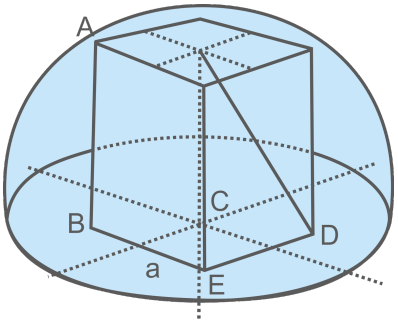
शंकु के अंदर अधिकतम आकार का घन :-



ΔABC ~ ΔADE

⇒ $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ ⇒ $\frac{h}{h-a} = \frac{r}{\frac{a}{\sqrt{2}}}$ ⇒ $a = \frac{\sqrt{2}rh}{\sqrt{2}r+h}$

अर्धगोला (गोलार्ध) के अंदर अधिकतम आकार का घन :-



माना R गोलार्ध की त्रिज्या है और 'a' घन की भुजा है। C गोलार्ध का केंद्र है.

BD = $\sqrt{2}$a

इसलिए, BC = $\frac{a}{\sqrt{2}}$

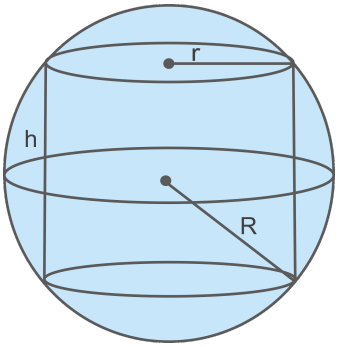
ΔABC में, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

अब, $R^2 = \frac{3a^2}{2}$

$a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ **R**

@apna_pdf

गोले के अंदर अधिकतम आकार का बेलन :-



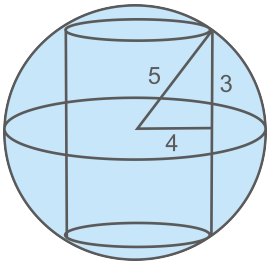
$$\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण :- एक गोले में एक बेलन अंकित है। गोले की त्रिज्या , बेलन की ऊंचाई का $\frac{5}{6}$ गुना है। बेलन के आयतन और गोले के आयतन का अनुपात क्या है ?

NTPC CBT II (10/05/2022) 1st Shift

(a) 27 : 50 (b) 72 : 125 (c) 6 : 5 (d) 36 : 25

हल : -



दिया गया है : $R = \frac{5}{6} h \Rightarrow \frac{R}{h} = \frac{5}{6}$

कुल ऊंचाई = 6 इकाई

तो, आधी ऊँचाई = 3 इकाई

गोले की त्रिज्या(R) = 5 इकाई

पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

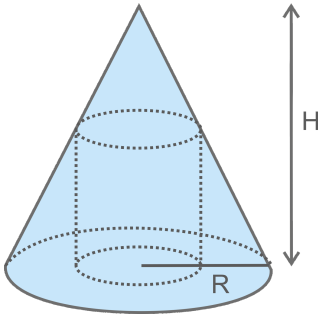
बेलन की त्रिज्या (r) = $\sqrt{R^2 - h^2}$

= $\sqrt{25 - 9}$ = $\sqrt{16}$ = 4 इकाई

अब आवश्यक अनुपात

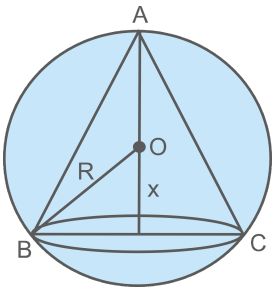
$$\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{\pi \times 4 \times 4 \times 6}{\frac{4}{3}\pi \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{72}{125}$$

शंकु के अंदर अधिकतम आकार का बेलन :-



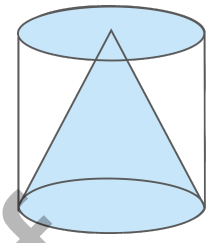
$$\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{शंकु का आयतन}} = \frac{4}{9}$$

गोले के अंदर अधिकतम आकार का शंकु :-



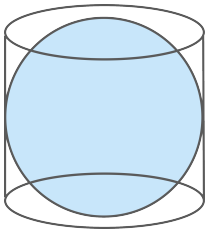
$$\frac{\text{शंकु का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{8}{27}$$

सिलेंडर के अंदर अधिकतम आकार का शंकु :-



$$\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{शंकु का आयतन}} = \frac{3}{1}$$

सिलेंडर के अंदर अधिकतम आकार का क्षेत्र :-



$$\frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{3}{2}$$

उदाहरण :- एक बेलन में 16 सेमी की ऊंचाई तक पानी भरी हुई है। यदि इसमें 9 सेमी त्रिज्या का एक गोला डाला जाए तो यदि बेलन की त्रिज्या 12 सेमी है तो पानी की ऊंचाई में वृद्धि ज्ञात कीजिए।

SSC CPO 05/10/2023 (1st Shift)

(a) 1.6 cm (b) 8.75 cm (c) 8 cm (d) 6.75 cm

हल :- प्रश्न के अनुसार,

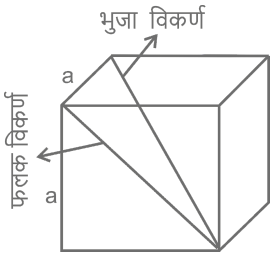
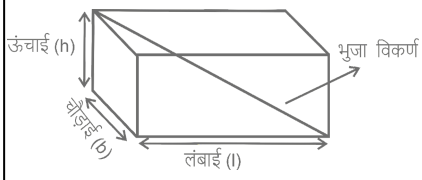
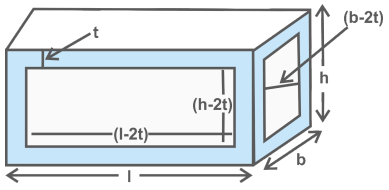
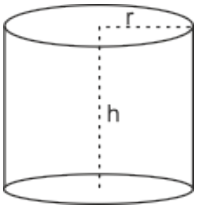
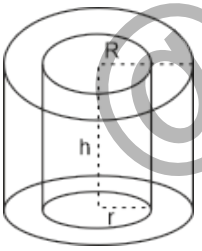
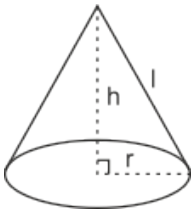
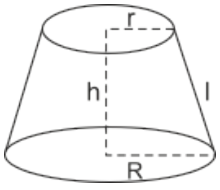
बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 12 \times 12 \times h$

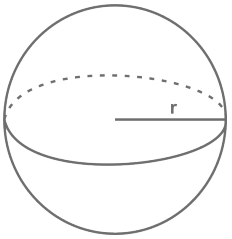
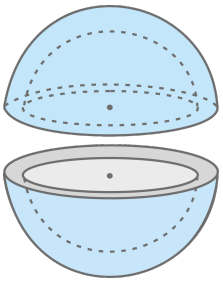
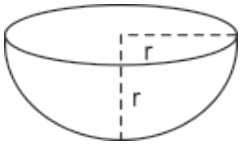
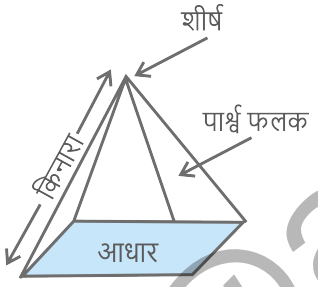
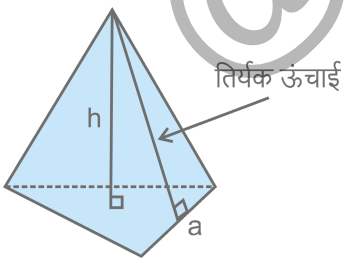
$= \frac{4}{3} \times 9 \times 9 \times 9 \Rightarrow h = \frac{4 \times 9 \times 9 \times 9}{3 \times 12 \times 12} \Rightarrow h = 6.75$ सेमी

@apna_pdf

मूल सूत्र तालिका (Basic Formulae Table)

त्रि - आयामी आकृतियाँ	आकृति	आयतन	पार्श्व सतह क्षेत्र	कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल
घन		a^3	$4a^2$	$6a^2$
घनाभ		$l \times b \times h$	$2(l + b) \times h$	$2(lb + bh + lh)$
डिब्बा (बॉक्स)		$(l - 2t)\,(b - 2t)(h - 2t)$ जहाँ , t = बॉक्स की मोटाई	–	–
बेलन		आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई = $\pi r^2 h$	$2\pi rh$	$2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$
खोखला बेलन		$\pi(R^2 - r^2)h$	$2\pi(R + r)h$	$2\pi(R + r)h + 2\pi(R^2 - r^2)$
शंकु		$\frac{1}{3}$ × आधार क्षेत्रफल × ऊँचाई = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$\pi rl = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	$\pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$
छिन्नक		$\frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR)$	$\pi(R + r)l$	$\pi\{(R + r)l + R^2 + r^2\}$

@apna_pdf

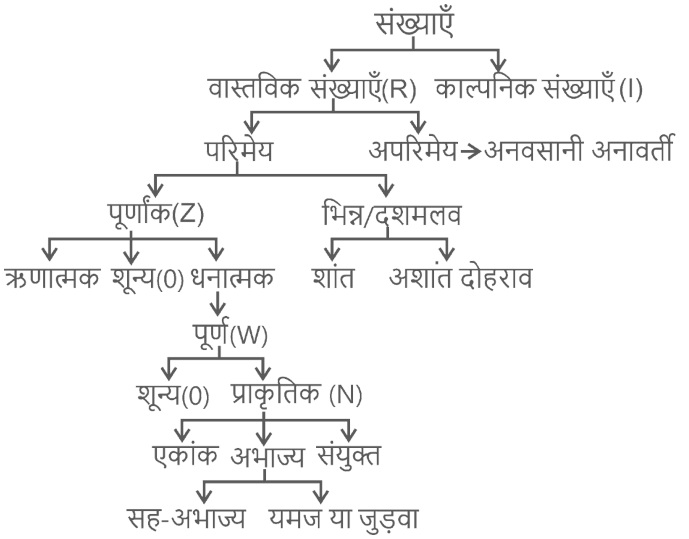
गोला		$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$	--
खोखला गोला		$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$	–	$2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$
अर्धगोला		$\frac{2}{3}\pi r^3$	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$
प्रिज्म	–	आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई	आधार का परिमाप × ऊंचाई	पार्श्व सतह का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल और ऊपर की सतह का क्षेत्रफल
पिरामिड		$\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई	$\frac{\text{परिमाप} \times \text{तिर्यक ऊंचाई}}{2}$	पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल
समचतुष्फलक		$\frac{1}{3}$ × आधार का क्षेत्रफल × ऊंचाई $= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 4 = \sqrt{3}\,a^2$

@apna_pdf

संख्या पद्धति

संख्या प्रणाली :- संख्या प्रणाली को संख्याओं को व्यक्त करने के लिए लिखने की प्रणाली के रूप में परिभाषित किया गया है। यह अंकों या अन्य प्रतीकों का सुसंगत तरीके से उपयोग करके किसी दिए गए सेट की संख्याओं का प्रतिनिधित्व करने के लिए गणितीय संकेतन है।

संख्याओं का वर्गीकरण



(1). वास्तविक संख्याएँ (R) : वास्तविक संख्याएँ वे संख्याएँ होती हैं जिनमें परिमेय और अपरिमेय दोनों संख्याएँ शामिल होती हैं। सामान्यतः सभी अंकगणितीय संक्रियाएँ इन संख्याओं पर की जा सकती हैं और उन्हें संख्या रेखा में भी दर्शाया जा सकता है।

उदाहरण :- 0, + 8, - 14, $\frac{4}{9}$, 1.8 आदि

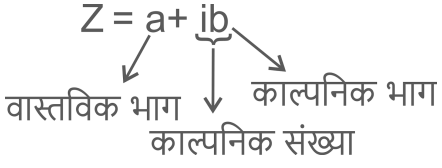
(2). काल्पनिक संख्याएँ (i) : काल्पनिक संख्याओं को ऋणात्मक संख्या के वर्गमूल के रूप में परिभाषित किया जाता है जहां इसका कोई निश्चित मान नहीं होता है। इसे अधिकतर वास्तविक संख्या को "i" नामक काल्पनिक इकाई से गुणा करके लिखा जाता है।

उदाहरण :- $\sqrt{-3}$, $\sqrt{7}$

नोट :- अयोटा (i) = $\sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^4 = 1$

सम्मिश्र संख्या :- सम्मिश्र संख्या एक वास्तविक संख्या और एक काल्पनिक संख्या का योग होती है। एक सम्मिश्र संख्या a + ib के रूप की होती है और आमतौर पर इसे z द्वारा दर्शाया जाता है।

मानक रूप :-



वास्तविक संख्या के प्रकार

(a) परिमेय संख्याएँ :- वह संख्या जिसका सटीक मान निर्धारित किया जा सकता है । साथ ही वह संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है, परिमेय संख्या कहलाती है।

उदाहरण :- $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{4}{5} = 0.8$, $\frac{9}{-5}$, $\frac{22}{7}$

(b) अपरिमेय संख्याएँ :- वह संख्या जिसका सटीक मान निर्धारित नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण :- π = 3.142857142857...

परिमेय संख्या के प्रकार

(a) पूर्णांक (Z) : पूर्णांक वे संख्याएँ हैं जो धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकती हैं, लेकिन भिन्न नहीं हो सकतीं।

Z = ... , -4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4 .....

(b) भिन्न/दशमलव :- भिन्नों को $\frac{p}{q}$, के रूप में लिखा जाता है, जहाँ $q \neq 0$ होता है, जबकि दशमलव में पूर्ण संख्या भाग और भिन्नात्मक भाग दशमलव बिंदु के माध्यम से जुड़े होते हैं, उदाहरण के लिए, 0.5

पूर्णांक के प्रकार (Z)

(a) शून्य (0) :- शून्य न तो धनात्मक और न ही ऋणात्मक पूर्णांक है। यह एक तटस्थ संख्या है अर्थात शून्य का कोई चिन्ह (+ या -) नहीं होता है।

(b) धनात्मक पूर्णांक (Z^+) :- धनात्मक संख्याओं को धनात्मक पूर्णांक कहा जाता है। ये पूर्णांक एक संख्या रेखा पर 0 के दाईं ओर स्थित होते हैं।

(Z^+) = 1, 2, 3, 4, 5...

(c) ऋणात्मक पूर्णांक (Z^-) :- ऋणात्मक संख्याओं को ऋणात्मक पूर्णांक कहा जाता है। ये पूर्णांक एक संख्या रेखा पर 0 के बायीं ओर स्थित होते हैं।

(Z^-) = -1, -2, -3, -4, -5...

धनात्मक पूर्णांकों के प्रकार (Z)

पूर्ण संख्याएँ (W) :- भिन्नात्मक या दशमलव भाग के बिना कोई भी गैर-ऋणात्मक संख्या पूर्ण संख्या कहलाती है।

उदाहरण :- 0, 1, 2, 3, 4... आदि.

प्राकृतिक संख्याएँ (N) :- 1 से अनंत तक के सभी धनात्मक पूर्णांक प्राकृतिक संख्या कहलाते हैं।

उदाहरण :- 1, 2, 3, 4... आदि।

प्राकृतिक संख्या के प्रकार

अभाज्य संख्या : एक संख्या जो 1 और स्वयं से विभाज्य है। केवल 2 एक सम अभाज्य संख्या है।

उदाहरण :- 2, 3, 5, 7, 11, आदि।

नोट :-

1 - 50 के बीच कुल अभाज्य संख्या → 15
50 - 100 के बीच कुल अभाज्य संख्या → 10
1 से 100 के बीच कुल अभाज्य संख्या → 25
1- 500 के बीच कुल अभाज्य संख्या → 95
1 - 1000 के बीच कुल अभाज्य संख्या → 168

नोट:- प्रत्येक अभाज्य संख्या को (6x ± 1) रूप में लिखा जा सकता है, लेकिन प्रत्येक (6x ± 1) एक अभाज्य संख्या नहीं हो सकती है।

उदाहरण :- 6 × 3 - 1 = 17 (अभाज्य संख्या) ,
6 × 4 + 1 = 25 (अभाज्य संख्या नहीं)

एकांक संख्या :- एक संख्या जो एक या एकमात्र इकाई का प्रतिनिधित्व करती है। उदाहरण के लिए, इकाई लंबाई का एक रेखाखंड लंबाई 1 का एक रेखाखंड होता है।

संयुक्त संख्या :- वह संख्या जिसमें दो या 2 से अधिक गुणनखंड हों, संयुक्त संख्याएँ कहलाती हैं।

उदाहरण :- 4, 6, 8, 9, 10, 12 आदि।

@ona_pdf

नोट :- 1 न तो अभाज्य है और न ही संयुक्त।
सबसे छोटी संयुक्त संख्या → 4
सबसे छोटी विषम संयुक्त संख्या→ 9
यदि x और y कोई दो विषम अभाज्य संख्याएँ हैं, तो , $x^2 + y^2$ और $x^2 - y^2$ एक भाज्य संख्याएँ हैं।

अभाज्य संख्या के प्रकार

(a) सह - अभाज्य संख्याएँ : दो संख्याएँ सह - अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं जब उनका HCF , 1 प्राप्त होता है।
उदाहरण :- (2 और 3), (6 और 11)

नोट :- दो अभाज्य संख्याएँ सदैव एक-दूसरे की सह-अभाज्य संख्याएँ होती हैं। कोई भी दो क्रमागत पूर्णांक हमेशा एक-दूसरे की सह-अभाज्य संख्या होते हैं।

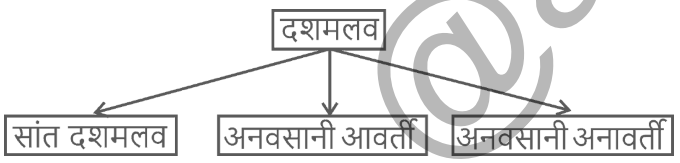
(b) यमज या जुड़वां अभाज्य संख्याएँ :- दो क्रमागत अभाज्य संख्याएँ जिनका अंतर 2 हो, यमज या जुड़वां अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
उदाहरण :- (3, 5) (5, 7) (11, 13) (17, 19) आदि
3, 5, 7 अभाज्य संख्याओं का एकमात्र युग्म है जिसमें 2 का अंतर है।

अभाज्य संख्या परीक्षण

यह पता लगाने के लिए कि कोई संख्या एक अभाज्य संख्या है या नहीं, हमें दी गई संख्या का निकटतम वर्गमूल ज्ञात करना होगा, फिर हमें यह पता लगाना होगा कि दी गई संख्या ,प्राप्त संख्या से कम किसी अभाज्य संख्या से विभाज्य है या नहीं। यदि यह विभाज्य है तो यह एक अभाज्य संख्या नहीं है और यदि विभाज्य नहीं है तो यह एक अभाज्य संख्या है।

उदाहरण :- ज्ञात कीजिए कि 177 एक अभाज्य संख्या है या नहीं।
हल :- 177 का निकटतम वर्गमूल 13 है। अब हमें यह जाँचने की आवश्यकता है कि क्या 177, 13 से छोटी अभाज्य संख्याओं से विभाज्य है। जाँच करने पर हम पाते हैं कि 177, 3 से विभाज्य है। इसलिए, 177 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

दशमलव संख्या



सांत दशमलव (terminating decimal) :- इसे $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा जा सकता है जहाँ $q \neq 0$ है और इसमें दशमलव बिंदु के बाद अंकों की एक सीमित संख्या होती है।

इन्हें परिमेय संख्याएँ भी कहा जाता है i.e. 0.4 → $\frac{2}{5}$

अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring) :- $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा जा सकता है जहां $q \neq 0$ लेकिन वे कभी समाप्त नहीं होते हैं, वे दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक संख्याओं को दोहराते हैं i.e. $0.\overline{5} \rightarrow \frac{5}{9}$

अनवसानी अनावर्ती (Non-terminating non-recurring) : $\frac{p}{q}$ रूप में नहीं लिखे जा सकते और वे अंकों के किसी समूह की पुनरावृत्ति के बिना, अंतहीन रूप से जारी रहते हैं ।
इसे अपरिमेय संख्याएँ भी कहा जाता है i.e. $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$

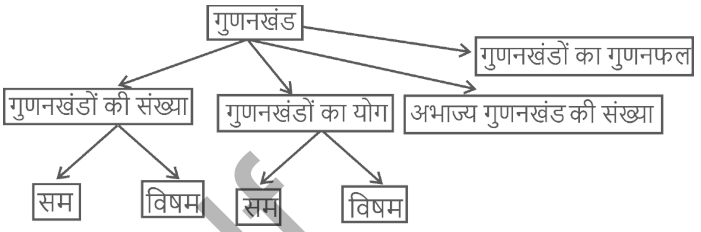
पूर्ण संख्या : पूर्ण संख्या एक धनात्मक पूर्णांक होती है जो संख्या को छोड़कर उसके गुणनखंडों के योग के बराबर होती है।
उदाहरण :- 6, 28, 496 आदि।

6 → गुणनखंड (1, 2, 3, 6) → 1 + 2 + 3 = 6
28 → गुणनखंड(1, 2, 4, 7, 14, 28) → 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28
नोट :- 6 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।

संख्या पद्धति की मूल बातें

(1). जातीय मान :- यह वही संख्या है जिसके बारे में पूछा गया है।
उदाहरण :- संख्या 23576 में 5 का जातीय मान 5 है और 7 का जातीय मान 7 है।

(2). स्थानीय मान :- किसी संख्या का स्थानीय मान, संख्या में उसकी स्थिति पर निर्भर करता है। प्रत्येक स्थान का मूल्य उसके दाएं तरफ की जगहों का 10^n गुना होता है।
उदाहरण :- संख्या 23576 में , 5 का स्थानीय मान 500 है और 3 का स्थानीय मान 3000 है।



किसी संख्या के गुणनखंड वे संख्याएँ होती हैं जो बिना कोई शेष छोड़े इसे पूर्ण रूप से विभाजित करती हैं।
उदाहरण :- 24 को 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 और 24 से पूर्णतः विभाजित किया जा सकता है, अतः ये संख्याएँ 24 के गुणनखंड हैं।

किसी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन :- जब किसी संख्या को उसके अभाज्य गुणनखंडों के गुणन के रूप में लिखा जाता है, तो उसे अभाज्य गुणनखंडन कहते हैं।
24 का अभाज्य गुणनखंड

2	24
2	12
2	6
	3

24 → 2 × 2 × 2 × 3 या $2^3 \times 3^1$

गुणनखंडों की संख्या :- गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करने के लिए हम संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों के रूप में लिखते हैं और फिर अभाज्य गुणनखंडों के घातांक (exponent) में 1 जोड़ते हैं और उन्हें गुणा करते हैं।
उदाहरण के लिए :- यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times \ldots$
तब कुल गुणनखंडों की संख्या = (p + 1) × (q + 1)× (r + 1)...
i.e. $24 = 2^3 \times 3^1$
24 के गुणनखंडों की संख्या → (3 + 1)(1 + 1) = 4 × 2 = 8.

सभी गुणनखंडों का योग :- यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times \ldots$
फिर गुणनखंडों का योग = $(a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^p) \times (b^0 + b^1 + b^2 + \ldots + b^q) \times (c^0 + c^1 + c^2 + \ldots + c^r)$.....

या

$$\frac{a^{p+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{q+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{r+1}-1}{c-1} \times \ldots\ldots$$

उदाहरण :- $24 = 2^3 \times 3^1$,
हल :- सभी गुणनखंडों का योग = $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1)$
= 15 × 4 = 60.

या

@apna_pdf

$= \frac{2^{3+1}-1}{2-1} \times \frac{3^{1+1}-1}{3-1} = \frac{2^4-1}{1} \times \frac{3^2-1}{2} = 15 \times 4 = 60$

किसी संख्या के सम गुणनखंडों की संख्या :- किसी संख्या के सम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम 2 को छोड़कर अभाज्य संख्याओं के घातांक (exponent) में 1 जोड़ते हैं।

नोट:- यदि किसी संख्या का गुणनखंड 2 नहीं है तो उसके 0 सम गुणनखंड होंगे। यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times \ldots$

फिर , सम गुणनखंडों की कुल संख्या = $p \times (q + 1) \times (r + 1) \times \ldots$

उदाहरण :- 120 के सम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात कीजिए ?

हल :- $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

सम गुणनखंडों की संख्या = $3 \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$

नोट :- सम गुणनखंड = कुल गुणनखंड - विषम गुणनखंड

सम गुणनखंडों का योग : हम 2^0 को अनदेखा करेंगे,

उदाहरण :- 120 के सम गुणनखंडों का योग ज्ञात कीजिए ?

हल :- सम गुणनखंडों का योग = $(2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1)$

$= 14 \times 4 \times 6 = 336$

या

$= \frac{2^{3+1}-2}{2-1} \times \frac{3^{1+1}-1}{3-1} \times \frac{5^{1+1}-1}{3-1}$

$= \frac{2^4-2}{1} \times \frac{3^2-1}{2} \times \frac{5^2-1}{5-1} = 14 \times 4 \times 6 = 336$

किसी संख्या के विषम गुणनखंडों की संख्या :- किसी संख्या के विषम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें 2 के घातांकों को अनदेखा करना पड़ता है।

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times \ldots$, जहां a = 2

फिर विषम गुणनखंडों की कुल संख्या = $(q + 1) \times (r + 1) \times \ldots$

उदाहरण :- 120 के विषम गुणनखंडों की संख्या ज्ञात कीजिए ?

हल :- $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

अभीष्ट संख्या = $(1 + 1)(1 + 1) = 4$

2 के घातांक को पूरी तरह से अनदेखा कर दिया जाता है।

किसी संख्या के विषम गुणनखंडों का योग :-

120 के विषम गुणनखंडों का योग = $(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1) = 4 \times 6 = 24$

या

$= \frac{3^{1+1}-1}{3-1} \times \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = \frac{3^2-1}{2} \times \frac{5^2-1}{4} = 4 \times 6 = 24.$

सभी गुणनखंडों के व्युत्क्रम का योग :- $\frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{संख्या}}$

उदाहरण :- 120 के सभी गुणनखंडों के व्युत्क्रम का योग ज्ञात कीजिए

हल :- $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

गुणनखंडों का योग = $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1)$

$= 360$

सभी गुणनखंडों के व्युत्क्रम का योग = $\frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{संख्या}} = \frac{360}{120} = 3$

गुणनखंडों का गुणनफल = $(\text{संख्या})^{\frac{\text{गुणनखंडों की कुल संख्या}}{2}}$

उदाहरण :- 20 के गुणनखंडों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल :- 20 = 1, 2, 4, 5, 10, 20.

गुणनखंडों का गुणनफल = $(20)^{\frac{6}{2}} = (20)^3 = 8000$

गुणनखंडों का औसत = $\frac{\text{गुणनखंडों का योग}}{\text{कुल गुणनखंड}}$

अभाज्य गुणनखंडो की कुल संख्या :- यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \times \ldots$ यहाँ a, b, c अभाज्य गुणनखंड हैं इसलिए दी गई संख्या में अभाज्य गुणनखंडों की कुल संख्या = p + q + r

उन गुणनखंडो की संख्या जो एक दूसरे के सह-अभाज्य हैं :-

यदि $N = a^p \times b^q \ldots$ यहाँ a, b, अभाज्य गुणनखंड हैं

तब सह-अभाज्य गुणनखंडों की संख्या होगी = $[(p + 1)(q + 1) + pq]$

यदि $N = a^p \times b^q \times c^r$

तब सह-अभाज्य गुणनखंडों की संख्या होगी = $[(p + 1)(q + 1)(r + 1) + pq + qr + rp + 3pqr]$

गुणनखंडो के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :-

* $1001 = 7 \times 11 \times 13$

$1001 \times abc = abcabc$

$1001 \times 234 = 234234$

उदाहरण :- निम्नलिखित में से कौन 531531 का गुणनखंड है?

(a) 15 (b) 13 (c) 11 (d) b और c दोनों

हल :- $531531 = 1001 \times 531 = 7 \times 11 \times 13 \times 531$

अतः 11 और 13 दोनों 531531 के गुणनखंड हैं।

* $111 = 37 \times 3$, $1001 \times 111 = 111111$,

जब किसी एक अंक को 6 बार लिखा जाता है, तो 3, 7, 11, 13 और 37 उसके गुणनखंड होते हैं।

उदाहरण :- निम्नलिखित में से कौन 222222 का गुणनखंड है?

(a) 17 (b) 57 (c) 68 (d) 74

हल :- $222222 = 2 \times 111111$

$= 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

स्पष्ट रूप से, $2 \times 37 = 74$ इसका एक गुणनखंड है।

आवर्ती दशमलव

आवर्ती दशमलव को उन संख्याओं के रूप में संदर्भित किया जाता है जो दशमलव के बाद समान रूप से दोहराई जाती हैं। कुछ परिमेय संख्याएँ दशमलव संख्याओं में परिवर्तित करने के बाद आवर्ती दशमलव उत्पन्न करती हैं, लेकिन सभी अपरिमेय संख्याएँ दशमलव रूप में परिवर्तित करने के बाद आवर्ती दशमलव उत्पन्न करती हैं।

जैसे :-

(1). $\frac{1}{3} = 0.3333333 \ldots\ldots = 0.\overline{3}$

(2). $0.\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$

(3). $0.53\overline{27} = \frac{5327-53}{9900} = \frac{5274}{9900}$

(4). $2.53\overline{27} = 2 + \frac{5327-53}{9900} = 2\frac{5274}{9900}$

विभाज्यता के नियम

2 से :- जब अंतिम अंक 0 या एक सम संख्या हो ।

अत: 520, 588

@apna_pdf

3 से :- अंकों का योग 3 से भाज्य हो ।
अत: 1971, 1974

4 से :- जब अंतिम दो अंक 4 से भाज्य हो या, वे शून्य हो ।
अत: 1528, 1700

5 से :- जब अंतिम अंक 0 या 5 हो ।
अत: 1725, 1790
6 से :- जब संख्या 2 और 3 दोनों से भाज्य हो ।
अत: 36, 72

7 से :- दी गयी संख्या में अंतिम अंक का दुगुना , शेष अंकों से बनी संख्या में से घटाएं । घटाने के उपरांत प्राप्त संख्या यदि 7 से विभाज्य हो तो दी गई संख्या भी 7 से विभाज्य होगी ।
अत: 651, 7 से विभाज्य है
65 - (1 × 2) = 63.चूँकि 63, 7 से विभाज्य है, इसलिए 651, 7 से विभाज्य है ।

7 की विभाज्यता के लिए Exam hall approach :-

उदाहरण :- क्या 16807 , 7 से विभाज्य है ?
हल :-
चरण 1 : दाहिनी ओर से शुरू करते हुए, संख्या को त्रिक में विभाजित करें, अर्थात 016/807
चरण 2 : दाहिनी ओर से त्रिक पर बारी-बारी से '+' और '-' चिन्ह लगाना अर्थात $016^{-}/807^{+}$
चरण 3 : इसे हल करने के बाद, परिणामी संख्या 7 से भाग दें
$\frac{807-16}{7} = \frac{791}{7} = 113$
अतः 16807, 7 से विभाज्य है

8 से :- जब अंतिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो ।
अत: 2256

9 से :- अंकों का योग 9 से भाज्य हो ।
अत: 9216

10 से :- जब अंतिम अंक 0 हो ।
अत: 452600

11 से :- जब सम और विषम स्थान के अंको के योग का अंतर 0 हो या 11 के गुणज के बराबर हो।
अत: 217382
विषम स्थान अंकों का योग = 2 + 7 + 8 = 17
सम स्थान अंकों का योग = 1 + 3 + 2 = 6
17 – 6 = 11, अतः 217382 , 11 से विभाज्य है।

Exam Hall Approach :-

उदाहरण :- 217382, 11 से कैसे विभाज्य है?
हल :-
चरण 1 : दी गई संख्या को किसी भी एक तरफ से जोड़े में विभाजित करें, फिर उनके बीच का अंतर ज्ञात करें

2	1	7	3	8	2
	+1		+4		+6

चरण 2 : इसे हल करने के बाद, परिणामी संख्या को 11 से विभाजित किया जाता है
$\Rightarrow \frac{1+4+6}{11} = \frac{11}{11} = 1$
यदि परिणाम 11 से विभाज्य है, तो 217382 भी 11 से विभाज्य है।

13 से :- यदि अंतिम अंक का चार गुना शेष अंकों से बनी संख्या में जोड़ने पर 13 से विभाज्य हो, तो वह संख्या 13 से विभाज्य होती है।
अत: 1326, 13 से विभाज्य है।
132 + (6 × 4) = 156, 156 के लिए यही प्रक्रिया दोहराएं।
15 + (6 × 4) = 39 इसलिए 39, 13 से विभाज्य है।

17 से :- 17 का विभाज्यता नियम कहता है, "यदि अंतिम अंक का पांच गुना शेष अंकों से बनी संख्या में से घटाएं और शेष या तो 0 या 17 का गुणक है, तो संख्या 17 से विभाज्य है"।
अत: 221 : 22 – 1 × 5 = 17

महत्वपूर्ण सूत्र

1. पहली n प्राकृतिक संख्या का योग = $\frac{n(n+1)}{2}$

2. पहली n विषम संख्या का योग = n^2

3. पहली n सम संख्या का योग = $n\ (n\ +\ 1)$

4. पहली n प्राकृतिक संख्याओं के वर्ग का योग = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. पहली n प्राकृतिक संख्याओं के घन का योग = $(\frac{n(n+1)}{2})^2$

6. $(x^m - a^m)$, प्रत्येक प्राकृतिक संख्या m के लिए $(x - a)$ से भाज्य है।

7. $(x^m - a^m)$, m के सम मानों के लिए $(x + a)$ और $(x - a)$ से भाज्य है।

8. $(x^m + a^m)$, m के विषम मानों के लिए $(x + a)$ से भाज्य है।

9. a^p, b^q, c^r, d^s के अभाज्य गुणनखंडो की संख्या $p + q + r + s$ होगी, जब a, b, c, d अभाज्य है।

10. $(a^m - 1)$ और $(a^n - 1)$ का HCF = $[(a^{HCF(m,n)} - 1)]$

किसी व्यंजक में शून्यों की संख्या

हम एक उदाहरण की सहायता से इस अवधारणा को समझेंगे। निम्नलिखित व्यंजक में शून्य की संख्या ढूँढ़ते हैं :-
$24 \times 32 \times 17 \times 23 \times 19 = (2^3 \times 3^1) \times 2^5 \times 17 \times 23 \times 19$
एक शून्य तब बनता है जब 2 और 5 के संयोजन होता हैं। चूंकि कोई '5' नहीं है इसलिए उपरोक्त व्यंजक में कोई शून्य नहीं होगा।
i.e.
$8 \times 15 \times 23 \times 17 \times 25 \times 22 =$
$2^3 \times (3^1 \times 5^1) \times 23 \times 17 \times 5^2 \times 2^1 \times 11$
इस व्यंजक में चार 2 तथा तीन 5 है। इससे 3 जोड़े
5 × 2 के बनाये जा सकते हैं। इसलिए अंतिम गुणनफल में 3 शून्य होंगे।

उदाहरण :- $2^2 \times 5^4 \times 4^6 \times 10^8 \times 6^{10} \times 15^{12} \times 8^{14} \times 20^{16} \times 10^{18} \times 25^{20}$ के गुणनफल में शून्य की संख्या ज्ञात करें ?

हल :-
$2^2 \times 5^4 \times 4^6 \times 10^8 \times 6^{10} \times 15^{12} \times 8^{14} \times 20^{16} \times 10^{18} \times 25^{20}$
$= 2^2 \times 5^4 \times 2^{12} \times 2^8 \times 5^8 \times 2^{10} \times 3^{10} \times 3^{12} \times 5^{12} \times 2^{42} \times 2^{32} \times 5^{16} \times 2^{18} \times 5^{18} \times 5^{40}$
शून्य 2 × 5 के संयोजन के साथ संभव है। यहां 5 की संख्या कम है इसीलिए 0 की संख्या 5 की संख्या तक सीमित होगी।
इस व्यंजक में 5 की संख्या है :
$5^4 \times 5^8 \times 5^{12} \times 5^{16} \times 5^{18} \times 5^{40}$;
अर्थात
4 + 8 + 12 + 16 + 18 + 40 = 98

@apna_pdf

n ! में शून्यों की संख्या

n ! में शून्यों की संख्या ज्ञात करने के लिए हम "n" को 5 से विभाजित करते हैं, जब तक कि हमें 5 से कम संख्या प्राप्त नहीं हो जाती है, और फिर हम इस प्रकार प्राप्त सभी भागफलों को जोड़ते हैं।

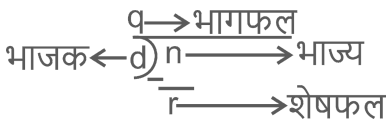
जैसे :- 36 ! में शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5	36	
5	7	(1)
	1	(2)

शून्यों की संख्या = 7 + 1 = 8.

शेषफल प्रमेय

मूल शेषफल सूत्र है :-



भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

1. शेषफल योगात्मक होता हैं :- माना कि जब $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ को अलग-अलग d से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ प्राप्त होते हैं।

अब, यदि हम $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$ को d से विभाजित करते हैं, तो हमें वही शेषफल प्राप्त होता है जो हमें $(r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n)$ को d से विभाजित करने पर प्राप्त होता है।

उदाहरण :- 55 + 45 + 68 को 16 से विभाजित करने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल :- जब हम 55, 45 और 68 को 16 से विभाजित करते हैं तो हमें संबंधित शेषफल 7, 13 और 4 प्राप्त होते हैं। अब हम शेषफलों के योग (अर्थात, 7 + 13 + 4 = 24) को 16 से विभाजित करके आवश्यक शेष प्राप्त कर सकते हैं, जो की 8 है।

वास्तविक दी गई संख्याओं (अर्थात, 55 + 45 + **68 = 168**) के योग को 16 से विभाजित करने पर भी हमें शेषफल 8 मिलता है।

2. शेषफल गुणक हैं :- माना कि जब $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ को भाजक d से विभाजित किया जाता है तो शेषफल $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ प्राप्त होतें है,जब $(a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n)$ को d से विभाजित किया जाता है तब वही शेशफल प्राप्त होगा जो $(r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n)$ को 'd' से विभाजित करने मे प्राप्त होगा ।

उदाहरण :- 201 × 198 × 80 को 35 से विभाजित करते समय शेषफल क्या होगा ?

हल :- जब 201 × 198 × 80 को 35 से विभाजित किया जाता है तो शेषफल को 201, 198, 80 को अलग-अलग विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल के गुणनफल को विभाजित करके प्राप्त किया जा सकता है। अब चूंकि शेषफल 26, 23, 10 हैं इसलिए आवश्यक शेषफल = 35 से विभाजित करने पर शेषफल (26 × 23 × 10) है।

अत: अभीष्ट शेषफल = $\frac{26 \times 23 \times 10}{35} = \frac{26 \times 230}{35} = \frac{26 \times 20}{35}$

अतः शेषफल 30 है।

उदाहरण :- 17 × 23 को 12 से विभाजित करने पर शेषफल क्या होगा ?

हल :- हम इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

$17 \times 23 = (12 + 5) \times (12 + 11)$

$= 12 \times 12 + 12 \times 1 + 5 \times 12 + 5 \times 11$

उपरोक्त व्यंजक में हम पाएंगे कि शेष अंतिम टर्म पर निर्भर करेगा, जो है 11×5

अब, शेषफल$(\frac{5 \times 11}{12}) = 7.$

इसलिए, $\frac{12 \times 12 + 12 \times 11 + 5 \times 12 + 5 \times 11}{12}$ और $\frac{5 \times 11}{12}$

शेषफल दोनों ही स्थिति में 7 ही है।

ऋणात्मक शेषफल

ऋणात्मक शेषफल का प्रयोग हमारी गणना को आसान बनाती है।

उदाहरण:

i). शेष$(\frac{7 \times 8}{9})$ = शेष$(\frac{-2 \times -1}{9}) = -2 \times -1 = 2$

ii). शेष$(\frac{55 \times 56}{57})$ = शेष$(\frac{-2 \times -1}{57}) = -2 \times -1 = 2$

iii). शेष$(\frac{7 \times 10}{9})$ = शेष$(\frac{-2 \times 1}{9}) = -2 \times 1 = -2$ या , 7(9 - 2)

बड़ी घातांक की अवधारणाएँ

निम्नलिखित उदाहरण देखें:

(i). शेष$(\frac{28^{12345}}{9})$ = शेष$(\frac{(27+1)^{12345}}{9})$

= शेष$(\frac{1^{12345}}{9}) = 1^{12345} = 1$

(ii). शेष$(\frac{26^{12345}}{9})$ = शेष$(\frac{(27-1)^{12345}}{9})$

= शेष $(\frac{-1^{12345}}{9}) = -1^{12345} = -1$ या 8(9 - 1)

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :-

यदि $\frac{N}{D}$ शेषफल R देता है

फिर, $\frac{2N}{D}$ → शेषफल 2R है

फिर, $\frac{3N}{D}$ → शेषफल 3R है

फिर, $\frac{N^2}{D}$ → शेषफल R^2 है

फिर, $\frac{3N+2}{D}$ → शेषफल $3R + 2$ है

नोट :- शेषफल < भाजक (हमेशा)

शेषफल प्रमेय के अनुप्रयोग

उदाहरण :- दिए गए व्यंजक के अंतिम दो अंक ज्ञात करें ?

$22 \times 31 \times 44 \times 27 \times 37 \times 43$

हल :- यदि हम उपरोक्त व्यंजक को 100 से विभाजित करते हैं, तो हम अंतिम दो अंक शेष के रूप में प्राप्त करेंगे।

= शेष$(\frac{22 \times 31 \times 44 \times 27 \times 37 \times 43}{100})$, सरल बनाने के लिए 4 से विभाजित करें:

= शेष $(\frac{22 \times 31 \times 11 \times 27 \times 37 \times 43}{25})$

= शेष $(\frac{132 \times 22 \times 216}{25})$

= शेष $(\frac{7 \times 22 \times 16}{25})$

@anna_pdf

= शेष $(\frac{4 \times 16}{25})$ = शेष $(\frac{14}{25})$ = 14
चूंकि हमने 4 से विभाजित किया था इसलिए हमें 4 से शेष को गुणा करना होगा। तो शेषफल होगा,
$14 \times 4 = 56$, जो व्यंजक के अंतिम दो अंक भी होंगे।

फ़र्मेट की प्रमेय :- यदि 'p' और 'q' दो सह-अभाज्य संख्याएँ हैं तो p^{q-1} को 'q' से विभाजित करने पर प्राप्त शेष हमेशा 1 होता है।

अत: शेष $\frac{p^{q-1}}{q}$ = 1

उदाहरण :- जब 3^4 को 5 से विभाजित किया जाए तो शेषफल क्या होगा ?
हल:- चूँकि 3 और 5 सह-अभाज्य हैं।

अतः , शेष $(\frac{3^4}{5})$ = 1

यूलर संख्या :- किसी संख्या x की यूलर संख्या का मतलब है कि प्राकृतिक संख्याओं की संख्या जो x से कम है, x के सह-अभाज्य हैं।
अतः 6 की यूलर संख्या 2 होगी क्योंकि प्राकृत संख्या 1 और 5 ही दो ऐसी संख्याएँ हैं जो 6 से कम हैं और 6 की सह-अभाज्य भी हैं।
गणितीय रूप से, किसी संख्या z की यूलर संख्या को E(z) प्रतीक द्वारा दर्शाया जाता है और इसकी गणना नीचे बताए अनुसार की जाती है।

$E(z) = z \times [1 - \frac{1}{a}] \times [1 - \frac{1}{b}] \times [1 - \frac{1}{c}] \ldots$
जहाँ a, b और c, z के विभिन्न अभाज्य गुणनखंड हैं

उदाहरण :- 20 की यूलर संख्या क्या है ?
हल :- 20 का अभाज्य गुणनखंडन $2^2 \times 5$ है।
अतः , 20 की यूलर संख्या होगी -

$E(20) = 20 \times [1 - \frac{1}{2}] \times [1 - \frac{1}{5}] = 20 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 8$

अतः, 20 की यूलर संख्या 8 है।

महत्वपूर्ण नोट :- सभी अभाज्य संख्याओं के लिए यूलर संख्या दी गई संख्या से एक कम संख्या होगी।

यूलर का प्रमेय :- यदि 'p' और 'q' दो सह-अभाज्य संख्याएँ हैं, तो,

$$\text{शेषफल}\left[\frac{p^{\text{यूलर की संख्या}}}{q}\right] = 1$$

उदाहरण :- जब 13^{18} को 19 से विभाजित किया जाता है तो शेषफल क्या होता है ?
हल :- 13 और 19 दोनों सह-अभाज्य हैं
अतः 19 की यूलर संख्या 18 है (एक अभाज्य संख्या की यूलर संख्या हमेशा उस संख्या से 1 कम होती है)

शेष $(\frac{13^{18}}{19})$ = 1

उदाहरण :- जब 19^{32} को 15 से विभाजित करने पर शेषफल क्या होगा ?
हल :-15 का गुणनखंड 3 × 5 है ।

$E(20) = 15 \times [1 - \frac{1}{3}] \times [1 - \frac{1}{5}] = 15 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 8$

अब शेष $(\frac{\{19^8\}^4}{15})$ = 1

नोट :- यूलर का प्रमेय केवल सह-अभाज्य संख्याओं के लिए लागू है।

विल्सन की प्रमेय :- यदि 'p' एक अभाज्य संख्या है तो यह (p -1)! + 1 को विभाजित करती है ।
(p - 1)! + 1.
अतः 5, (5 - 1)! + 1 को विभाजित करता है = 4! + 1 = 25
इसका यह भी अर्थ है कि जब (p - 1)! को 'p' से विभाजित किया जाता है तब शेष -1 या 'p - 1' होता है।

उदाहरण :- 60! को 61 से विभाजित करने पर शेषफल क्या प्राप्त होता है?
हल :- विल्सन प्रमेय का उपयोग करके

शेष $[\frac{(61-1)!}{61}]$ = - 1 या 60

चक्रीयता और इकाई अंक

चक्रीयता तालिका :-

संख्या	चक्रीयता	घात चक्र
1	1	1
2	4	2, 4, 8, 6
3	4	3, 9, 7, 1
4	2	4, 6
5	1	5
6	1	6
7	4	7, 9, 3, 1
8	4	8, 4, 2, 6
9	2	9, 1
10	1	0

इकाई अंक 0, 1, 5, 6 वाली संख्या में कितनी भी घात लगाने पर इकाई अंक समान होगी ।

$4 \rightarrow (4)^{\text{विषम}}$ = इकाई अंक → 4
$(4)^{\text{सम}}$ = इकाई अंक → 6
$9 \rightarrow (9)^{\text{विषम}}$ = इकाई अंक → 9
$(9)^{\text{सम}}$ = इकाई अंक → 1

उदाहरण :- 512 × 216 का इकाई अंक ज्ञात करें?
हल :-

$512 \overset{\times}{\curvearrowright} 216 = 12 \rightarrow$ इकाई अंक 2

उदाहरण :- 512 + 216 का इकाई अंक ज्ञात करें?
हल :-

$512 \overset{+}{\curvearrowright} 216 = 8$ इकाई अंक

उदाहरण :- 512 - 216 का इकाई अंक ज्ञात करें?
हल :-

$512 \overset{-}{\curvearrowright} 216 = 12 - 6 = 6$ इकाई अंक

उदाहरण :- $(912)^{19821}$ का इकाई अंक ज्ञात करें?

@apna_pdf

हल :- 2 की चक्रीयता 4 है।
अतः ,
$(2)^{19821}$ का इकाई अंक = $2^{4\times4955} \times 2^1 = 2$

नोट :- 3 से बड़ा फैक्टोरियल हमेशा 4 से विभाज्य होता है।

उदाहरण :- $2^{9!}$ का इकाई अंक ज्ञात करें ?
हल :- $2^{9!} \rightarrow 2^4 \rightarrow 16 \rightarrow 6$ (इकाई अंक)

उदाहरण :- $493^{512!} \times 217^{396!}$ का इकाई अंक ज्ञात करें
हल : $493^{512!} \times 217^{396!} \rightarrow (3)^{512!} \times (7)^{396!}$
$\rightarrow (3)^4 \times (7)^4 \rightarrow 1 \times 1 \rightarrow 1$ (इकाई अंक)

संख्याओं की गिनती

उदाहरण :- 350 से 600 तक कितने 5 आएंगे ?
हल :- शून्य की आवृत्ति 5 की आवृत्ति के बराबर होगी।

0 से 600 तक 5 की आवृत्ति = $[\frac{600}{5}] + [\frac{600}{5^2}] + [\frac{600}{5^3}]$

$= [\frac{600}{5}] + [\frac{600}{25}] + [\frac{600}{125}] = 120 + 24 + 4 = 148$

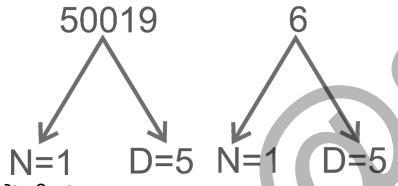
और 0 से 350 तक 5 की आवृत्ति $= [\frac{350}{5}] + [\frac{350}{5^2}] + [\frac{350}{5^3}]$

$= [\frac{350}{5}] + [\frac{350}{25}] + [\frac{350}{125}] = 70 + 14 + 2 = 86$

350 से 600 तक 5 की आवृत्ति = 148 - 86 = 62

गिनती लिखने के लिए आवश्यक अंक

Concept :- N = संख्या और D = अंक



1 - 9 तक अंकों की संख्या = 9D
1 – 99 तक अंकों की संख्या = 189D
1 - 999 तक अंकों की संख्या = 2889D

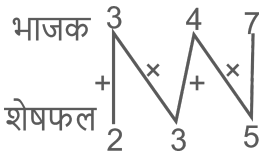
उदाहरण :- 1 से 300 तक गिनती लिखने के लिए कितने अंकों की आवश्यकता होती है ?
हल :- प्रश्न के अनुसार,
1 - 9 तक अंकों की संख्या ⇒ (9 × 1) = 9D
10 - 99 तक अंकों की संख्या ⇒ (90 × 2) = 180D
100 - 300 तक अंकों की संख्या ⇒ (201× 3) = 603D
कुल आवश्यक अंक = (9 + 180 + 603) = 792D

क्रमिक विभाजन की अवधारणा

यदि किसी संख्या को क्रमशः a और b से विभाजित किया जाए, तो शेषफल क्रमशः r और R रहता है। इस प्रक्रिया से संख्या का पता कर सकते है ।

उदाहरण :- जब किसी संख्या को क्रमिक रूप से 3, 4 और 7 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल क्रमशः 2, 3 और 5 प्राप्त होता है। 84 को उसी संख्या से विभाजित करने पर शेषफल क्या होगा ?

हल :- प्रयुक्त सूत्र: लाभांश= भाजक × भागफल + शेष
विधि 1 : अंतिम से आरंभ करे
माना अंतिम भाजक = 0
संख्या 7 से विभाज्य होने पर शेषफल 5 देती है ⇒ 7 × 0 + 5 = 5
संख्या 4 से विभाज्य होने पर शेषफल 3 देती है ⇒ 4 × 5 + 3 = 23
संख्या 3 से विभाज्य होने पर शेषफल 2 देती है ⇒ 3 × 23 + 2 = 71
अतः जब 71 को 84 से विभाजित किया जाता है तो शेषफल 71 होगा
विधि 2 :



चरण 1 : 5 को 4 से गुणा करें = 20
चरण 2 : 20 में 3 जोड़ें = 23
चरण 3 : चरण 2 के परिणाम को 3 से गुणा करें = 69
चरण 4 : a69 में 2 जोड़ें = 71, इस प्रकार N का मान = 71 है
अत: शेषफल 71 होगा ।

जब अंक उलट जाते हैं

उदाहरण :- दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों को परस्पर बदल दिया जाता है तो संख्या में 36 की कमी हो जाती है। संख्या के संदर्भ में निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही है?
I. अंकों का अंतर 4 है।
II. संख्या 84 हो सकती है।
III. संख्या सदैव एक भाज्य संख्या है।
SSC CGL Tier II (08/08/2022)
(a) I, II और III (b) II और III (c) I और III (d) I और II
हल :-
I. माना, दो अंकों की संख्या 10x + y है।
प्रश्न के अनुसार,
(10x + y) - (10y + x) = 36
9x - 9y = 36 ⇒ x - y = 4
II. संख्या का मान 84 हो सकता है क्योंकि 84 - 48 = 36
III. दिए गए प्रश्न में बनी संख्या भाज्य संख्या हो भी सकती है और नहीं भी। यानी 84 जो एक भाज्य संख्या है। और 73 जो एक अभाज्य संख्या है। स्पष्ट रूप से, हम देख सकते हैं कि विकल्प (d) सही है।

@apna_pdf

महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य

LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) दो या दो से अधिक दी गई संख्याओं का LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) वह छोटी से छोटी संख्या है जो उनमें से प्रत्येक से पूर्णतः विभाज्य होती है ।

HCF (महत्तम समापवर्तक) दो या दो से अधिक संख्याओं का HCF (महत्तम समापवर्तक) वह सबसे बड़ी संख्या है जो उनमें से प्रत्येक को पूर्णतः विभाजित करती है। HCF को 'उच्चतम सामान्य भाजक' (HCD) और "उच्चतम सामान्य गुणज' (GCM) के रूप में भी जाना जाता है ।

गुणज और गुणनखंड की अवधारणा :-

यदि X , Y , और Z तीन प्राकृतिक संख्याएँ हैं और X × Y = Z, तो
(i) X और Y, Z के गुणनखंड कहलाते हैं।
(ii) Z को X और Y से विभाज्य कहा जाता है।
(iii) Z को X और Y का गुणज कहा जाता है।

उदाहरण :- सकारात्मक पूर्णांकों का समुच्चय जो 18 का गुणनखंड है (1, 2, 3, 6, 9, 18) है।

HCF निकालने की विधि

दी गई संख्याओं का HCF ज्ञात करना :-

1. दी गई संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों में विभाजित करें
2. HCF सभी संख्याओं में समान अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल होगा।
आइए कुछ हल किए गए उदाहरणों की सहायता से HCF ज्ञात करने की प्रक्रिया सीखें।

HCF गुणनखंडन विधि द्वारा

उदाहरण :- 6, 12, 18 का HCF
हल :- पहले 6, 12, 18 के गुणनखंड ज्ञात कीजिए और फिर उभयनिष्ठ गुणनखंडों को गुणा कीजिए।

2 | 6	2 | 12	2 | 18
3 | 3	2 | 6	3 | 9
1	3 | 3	3 | 3
	1	1

6 = 2 × 3, 12 = 2 × 2 × 3, 18 = 2 × 3 × 3
HCF = 2 × 3 = 6
3, 6, 9, 12 का HCF और LCM स्वयं ज्ञात करने का प्रयास करें।

3, 6, 9, 12 का HCF भी भाग विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। यह तब उपयोगी होता है जब संख्याएं बड़ी हों।

विभाजन विधि द्वारा HCF

उदाहरण :- 24, 48, 72 और 100 का HCF
हल :- विभाजन विधि शुरू करने के लिए सबसे छोटी दो संख्याओं को चुनिए।

```
24)48(2        48)72(1        24)100(4
 -48            -48             -96
  XX            24)48(2           4)24(6
                -48               -24
                 XX                XX
```

24 और 48 का HCF = 24
24, 48 और 72 का HCF = 24
24, 48, 72 और 100 का H.C.F. = 4

नोट :-
(i). दो अभाज्य संख्याओं का HCF हमेशा 1 होता है।
(ii). सह-अभाज्य संख्याओं का HCF हमेशा 1 होता है।

LCM निकालने की विधि

दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्तक वह सबसे छोटी संख्या होती है जो उन सभी से पूर्णतः विभाजित होती है। दूसरे शब्दों में, यह दी गई संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखंडों की उच्चतम घातों का गुणनफल है।

दी गई संख्याओं का LCM ज्ञात करने के लिए :-

1. दी गई संख्याओं को उनके अभाज्य गुणनखंडों में विभाजित करें।
2. LCM दी गई संख्याओं में होने वाले सभी गुणनखंडों की उच्चतम घातों का गुणनफल होगा।

गुणनखंडन विधि द्वारा

उदाहरण :- 96, 36 और 18 का LCM ज्ञात कीजिए ?
हल :- $96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3^1$;
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$
$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$
$LCM = 2^5 \times 3^2 = 288$

उदाहरण :- 6, 12, 8 का LCM ज्ञात कीजिए ?
हल :-

2 | 6,12,8
2 | 3,6,4
3 | 3,3,2
2 | 1,1,2
1,1,1

LCM = 2 × 2 × 3 × 2 = 24

HCF और LCM के बीच संबंध

(1). LCM × HCF = पहली संख्या × दूसरी संख्या

उदाहरण :- संख्या 8 और 12 के लिए,
हल :- LCM = 24 और HCF = 4
अब, LCM × HCF = 24 × 4 = 96
साथ ही, 8 × 12 = 96

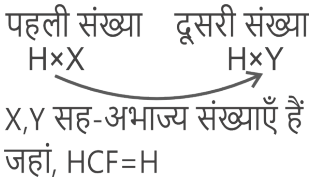
(2). कुछ संख्याओं का HCF हमेशा संख्याओं के LCM का गुणनखंड होता है।

नोट :- यदि दो संख्याओं का HCF, 1 है तो वे सह-अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

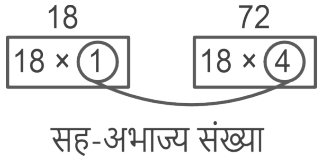
(3). $\frac{LCM}{HCF}$ = गुणनफल
जहाँ LCM और HCF दो संख्याओं N_1 और N_2 हैं। यदि हम ऊपर प्राप्त गुणनफल के दो सह-अभाज्य गुणनखंड F_1 और F_2 पाते हैं ।

(4).

@apna_pdf



उदाहरण :-



(5). यदि पहली संख्या = N_1 और दूसरी संख्या = N_2

N_1 का HCF= Hx

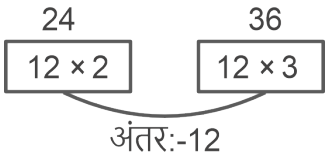
N_2 का HCF = Hy

और N_1 और N_2 का HCF = H

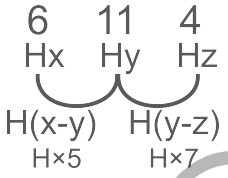
इसलिए ,

N_1 और N_2 के बीच का अंतर = Hx - Hy = H(x - y)

उदाहरण :- N_1 = 24 और N_2 = 36



नोट :- HCF हमेशा या तो दो संख्याओं का अंतर या दो संख्याओं के अंतर का गुणनखंड होता है।



(6). जब दूसरा भाजक, पहले भाजक का गुणनखंड हो, तो दूसरा शेषफल पहले शेषफल को दूसरे भाजक से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण :- जब 29 को 8 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल 5 प्राप्त होता है, तो उसी संख्या को 4 से विभाजित करने पर शेषफल क्या होगा ?
हल :- यहाँ, दूसरा भाजक जो 4 है, पहले भाजक का एक गुणनखंड है जो 8 है। इसलिए, पहले शेषफल 5 को दूसरे भाजक अर्थात 4 से भाग देने पर हमें दूसरा शेषफल प्राप्त होता है जो कि 1 है। इसलिए, आवश्यक उत्तर 1 है।

भिन्न का LCM और HCF

भिन्न का LCM = $\frac{\text{अंश का } LCM}{\text{हर का } HCF}$

भिन्न का HCF = $\frac{\text{अंश का } HCF}{\text{हर का } LCM}$

उदाहरण :- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ का LCM और HCF ज्ञात करें ?
हल :-

LCM = $\frac{\text{अंश का } LCM}{\text{हर का } HCF} = \frac{LCM \text{ का } 1, 2, 3}{HCF \text{ का } 2, 3, 4} = \frac{6}{1}$

HCF = $\frac{\text{अंश का } HCF}{\text{हर का } LCM} = \frac{HCF \text{ का } 1, 2, 3}{LCM \text{ का } 2, 3, 4} = \frac{1}{12}$

दशमलव का LCM और HCF

उदाहरण :- 0.63, 1.05 और 2.1 का HCF और LCM ज्ञात करें
SBI PO Pre 19/12/2022 (2nd Shift)
(a) 0.21 और 6.30 (b) 1.05 और 6.30
(c) 2.1 और 0.63 (d) 0.63 और 1.05
हल :- संख्याएँ 0.63, 1.05 और 2.1 हैं
प्रत्येक संख्या को 100 से गुणा करने पर
तब, संख्याएँ = 63, 105, 210
63 = 3 × 3 × 7, 105 = 3 × 5 × 7
210 = 2 × 3 × 5 × 7
अब, LCM(63 , 105 , 210)
= 2 × 3 × 3 × 5 × 7 = 630
तब , LCM (0.63 , 1.05 , 2.10) = 6.30
और, HCF (63, 105, 210) = 3 × 7 = 21
तब , HCF (0.63 , 1.05 , 2.10) = 0.21
अतः, HCF और LCM क्रमशः 0.21 और 6.30 हैं

घातांको का LCM

(1). जब दी गई संख्या का आधार समान हो, तो उच्चतम घात वाली संख्या दी गई संख्या का LCM होगी।

उदाहरण :- $3^2, 3^4, 3^8, 3^9$ का LCM ज्ञात कीजिए ?
हल :- यहां आधार समान हैं इसलिए दी गई संख्या का LCM , 3 की उच्चतम घात 3^9 होगी

(2). जब आधार समान नहीं है, और आधार में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं हैं, तो दी गई संख्या का गुणनफल LCM होगा।

उदाहरण :- $3^2, 2^4$ का LCM ज्ञात कीजिए ?
हल :- LCM. = $3^2 \times 2^4 = 144$

घातांको का HCF

(1). जब दी गई संख्या का आधार समान हो, तो सबसे छोटी घात वाली संख्या दी गई संख्या का HCF होगी।

उदाहरण :- $3^2, 3^4, 3^8, 3^9$ का HCF ज्ञात कीजिए ?
हल :- HCF = 3^2

(2). जब आधार समान नहीं है, और आधार में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं हैं, तो दी गई संख्या का HCF 1 होगा।

उदाहरण :- $3^2, 5^4, 7^8$ का HCF ज्ञात कीजिए ?
हल :- HCF = 1

LCM का अनुप्रयोग :-

सबसे छोटी संख्या जो x, y, z से पूर्णतः विभाज्य है = (x , y , z) का LCM
वह सबसे छोटी संख्या जिसे x, y, z से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल r बचता है = (x ,y ,z का LCM) + r

@apna_pdf

वह सबसे छोटी संख्या जिसे x , y , z से विभाजित करने पर क्रमशः a , b , c शेष बचता है = LCM (x , y, z) - k
जहाँ k = (x - a) = (y - b) = (z - c)

HCF का अनुप्रयोग :-
वह सबसे बड़ी संख्या जो x, y, z से पूर्णतया विभाज्य है = (x, y, z) का HCF
वह सबसे बड़ी संख्या जिसे x, y, z से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति में शेषफल r बचता है
= HCF [(x - r) , (y - r) , (z - r)] और HCF [(x - y) , (y - z) , (z - x)]

वह सबसे बड़ी संख्या जिसे x , y , z से विभाजित करने पर क्रमशः a , b , c शेष बचता है = = HCF [(x - a) , (y - b), (z - c)]

बहुपदों का LCM और HCF

LCM × HCF = पहला बहुपद × दूसरा बहुपद

$$\text{LCM} = \frac{\text{पहला बहुपद} \times \text{दूसरा बहुपद}}{HCF}$$

$$\text{HCF} = \frac{\text{पहला बहुपद} \times \text{दूसरा बहुपद}}{LCM}$$

नोट :- दो या दो से अधिक बहुपदों का LCM न्यूनतम घात का उभयनिष्ठ गुणनखंड होता है।
दो या दो से अधिक बहुपदों का HCF उच्चतम घात का उभयनिष्ठ गुणनखंड होता है।

उदाहरण :-. x^2 - 8x + 15 और x^2 - 5x + 6 का लघुतम समापवर्तक (LCM) _____ है।
SSC CPO 05/10/2023 (2nd Shift)
(a) (x + 5)(x + 2)(x + 3) (b) (x - 5)(x - 2)(x - 3)
(c) (x + 5)(x - 2)(x - 3) (d) (x - 2)(x - 3)^2(x - 5)
हल :- प्रश्न के अनुसार,
$x^2 - 8x + 15$
$x^2 - (5 + 3)x + 15$
$x(x - 5) - 3(x - 5)$
$(x - 5), (x - 3)$
और $x^2 - 5x + 6$
$x^2 - (3 + 2)x + 6$
$x(x - 3) - 2(x - 3)$
$(x - 3), (x - 2)$
तो LCM $(x - 5), (x - 2), (x - 3)$ होगा।

उदाहरण :- बहुपदों (x^3 - 8), (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) और (x^3 - 4x^2 + 4x) का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 12/09/2023 (3rd Shift)
(a) (x - 1) (b) (x - 2) (c) (x - 8) (d) (x - 4)
हल :- (x^3 - 8) = (x − 2) (x^2 + 2x + 4)
(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = (x − 2)^3
और (x^3 - 4x^2 + 4x) = x (x − 2)^2
(x^3 - 8), (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)
और (x^3 - 4x^2 + 4x) का HCF = (x − 2)

➢ [$a^x \pm 1$, $a^y \pm 1$] का HCF = $a^{HCF(x,y)} \pm 1$

उदाहरण :- (4^{315} − 1) और (4^{25} −1) का महत्तम समावर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए।

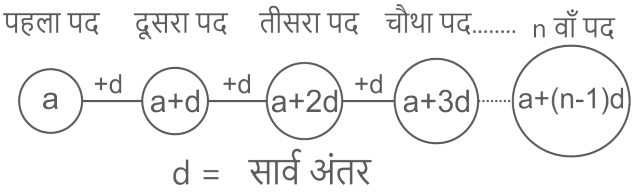
SSC MTS 26/07/2022 (Morning)
(a) 1 (b) (4^{25} − 1) (c) 1024 (d) 1023
हल :- (4^{315} - 1)(4^{25} - 1)
315 और 25 का महत्तम समावर्तक = 5
(4^{315} - 1)(4^{25} - 1) का महत्तम समावर्तक = 4^5 - 1 = 1023

@apna_pdf

समान्तर श्रेणी और गुणोत्तर श्रेणी

समान्तर श्रेणी (A.P.)

समान्तर श्रेणी संख्याओं का एक समूह है जो नियमों के एक सेट का पालन करती है। समान्तर श्रेणी (A.P.) में प्रत्येक दो क्रमिक पदों के बीच का अंतर समान होता है।



समान्तर श्रेणी (A.P.) सूत्र

श्रेणी : $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$
समान्तर श्रेणी का सार्व अंतर (d) = $a_2 - a_1$
a) समान्तर श्रेणी का n वाँ पद
$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ ...{a_1 = पहला पद , n = पदों की संख्या }
या a_1 = आखिरी पद - (n - 1) d

उदाहरण:- एक समांतर श्रेणी का नौवां पद ज्ञात कीजिए जिसका पहला पद 5 और सार्व अंतर 4 है
RRB NTPC CBT - I 08/02/2021 (Evening)
(a) 35 (b) 39 (c) 37 (d) 41
हल:- पहला पद (a) = 5, सार्व अंतर (d) =4
अंकगणितीय प्रगति (AP) का 9वां पद =
a + (n - 1)d = 5 + (9 - 1) × 4 = 5 + 32 = 37

b) समान्तर श्रेणी के n पदों का योग → $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\,d]$

$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)\,d]$

$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

या $S_n = \frac{n}{2}$[पहला पद + आखिरी पद]

उदाहरण:- 151 पद तक अनुक्रम 243, 256, 269 , ... का योगफल ज्ञात कीजिए।
(a) 183917 (b) 183916 (c) 183915 (d) 183918
हल:- दी गई समांतर श्रेणी = 243, 256, 269 , ---------- 151वाँ पद
पहला पद (a) = 243 , सार्व अंतर (d) = 13
$S_{151} = \frac{n}{2}[2 \times a + (n-1)d] = \frac{151}{2}[2 \times 243 + 150 \times 13]$
S_{151} = 151 × 1218 = 183918

उदाहरण :- समांतर श्रेणी 88, 90, 92, 94... का कौन-सा पद 142 है?
(a) $30^{\text{वां}}$ (b) $29^{\text{वां}}$ (c) $28^{\text{वां}}$ (d) $27^{\text{वां}}$
हल :- a_n = a + (n − 1) × d
जहां d = 90 - 88 = 92 - 90 = 2
= 142 = 88 + (n − 1) × 2
= 2n = 142 − 86 ⇒ $n = \frac{56}{2} = 28^{\text{वां}}$

विशेष श्रृंखला

1). यदि श्रृंखला $\frac{1}{a \times b} + \frac{1}{b \times c} + \frac{1}{c \times d} + \frac{1}{d \times e} + \frac{1}{e \times f} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1) \times n}$ है तो इसका मान = $\frac{1}{\text{सार्व अंतर}}[\frac{1}{a} - \frac{1}{n}]$

उदाहरण:- $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \ldots\ldots + \frac{1}{9 \times 10}$ का मान ज्ञात कीजिए।
RRB JE 24/05/2019 (Evening)
(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{9}{10}$ (c) $\frac{5}{11}$ (d) $\frac{2}{5}$
हल:- यदि श्रृंखला $\frac{1}{a \times b} + \frac{1}{b \times c} + \frac{1}{c \times d} + \frac{1}{d \times e} + \frac{1}{e \times f} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \times n}$ के रूप में है तो इसका मान होगा = $[\frac{1}{a} - \frac{1}{n}]$
दी गई श्रृंखला $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \ldots\ldots + \frac{1}{9 \times 10}$ अतः इसका मान होगा = $[1 - \frac{1}{10}] = \frac{9}{10}$

2). यदि श्रृंखला $\frac{1}{1 \times 4 \times 7} + \frac{1}{4 \times 7 \times 10} + \frac{1}{7 \times 10 \times 13} + \frac{1}{10 \times 13 \times 16} + \frac{1}{13 \times 16 \times 19}$ है तो इसका मान
$(\frac{1}{\text{पहली और तीसरी संख्या का अंतर}})[\frac{1}{\text{पहली और दूसरी संख्या का गुणनफल}} - \frac{1}{\text{अंतिम दो संख्याओं का गुणनफल}}] = (\frac{1}{7-1})[\frac{1}{1 \times 4} - \frac{1}{16 \times 19}]$

3). $\frac{1}{1 \times 3 \times 5} + \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5 \times 7} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7 \times 9} + \frac{1}{7 \times 10}$ + ...20 गुना
$= (\frac{1}{1 \times 3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5 \times 7} + \ldots + \frac{1}{19 \times 21 \times 23}) + (\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \ldots + \frac{1}{28 \times 31})$
$= \frac{1}{4}(\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{21 \times 23}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{1 \times 1} - \frac{1}{31})$
$= \frac{1}{4} \times \frac{160}{21 \times 23} - \frac{10}{21} = \frac{6070}{14973}$

नोट :- $\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{b-a}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$
$\frac{1}{a \times b \times c} = \frac{1}{c-a}(\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc})$
$\frac{1}{a \times b \times c \times d} = \frac{1}{d-a}(\frac{1}{abc} - \frac{1}{bcd})$

4). प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग
$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

5). प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योग
2 + 4 + 6 + 8 + ...+ 2n = n(n + 1)

6). पहली n विषम प्राकृत संख्याओं का योग
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots\ldots(2n-1) = n^2$

7). प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग

@apna_pdf

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ...n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8). प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनो का योग

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ...n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

9). एकान्तर धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं की श्रृंखला के पहले 'n' पदों का योग:

स्थिती 1 : जब 'n' सम है

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... = \frac{-n(n+1)}{2}$

स्थिती 1 : जब 'n' विषम है

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... = \frac{n(n+1)}{2}$

अंकगणित माध्य (Arithmetic mean) :- $\frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$

1). यदि x और y के बीच A अंकगणितीय माध्य है, तो,

$A = \frac{x+y}{2}$

2). सामान्य तौर पर, यदि $a_1, a_2, a_3, a_4 ..... a_n$ पद AP में हैं, इसलिए उनका अंकगणितीय माध्य होगा

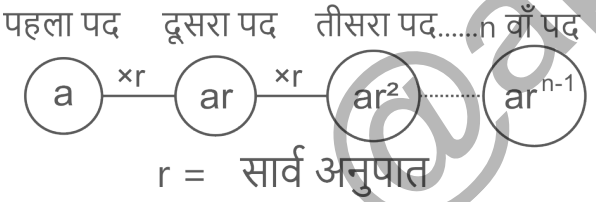
अंकगणितीय माध्य (A.M.) $= \frac{a_1, a_2, a_3, a_4 ..... a_n \text{ पदो का योग}}{n}$

3). लगातार विषम पदों मे समान्तर श्रेणी:- a - d , a , a + d

4). लगातार सम पदों मे समान्तर श्रेणी :- a - 3d , a - d , a + d , a +3d

गुणोत्तर श्रेणी (G.P.)

गुणोत्तर श्रेणी एक अनुक्रम है जिसमें प्रत्येक पद का एक निश्चित अनुपात होता है, जिसे सार्व अनुपात के रूप में जाना जाता है। गुणोत्तर श्रेणी को आम तौर पर a , ar , ar^2..., के रूप में लिखा जाता है, जहां a पहला पद है, और r अनुक्रम का सार्व अनुपात है। सामान्य अनुपात के लिए ऋणात्मक और धनात्मक दोनों संख्याएँ संभव हैं।



गुणोत्तर श्रेणी (G.P) सूत्र

गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात (r) = $\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{पहला पद}}$

a). पहले पद a और सामान्य अनुपात r के साथ ज्यामितीय प्रगति के nवें पद का सूत्र → $(a_n) = ar^{n-1}$

b). गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग S_n

यदि $|r|<1$, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

यदि $|r|>1$, $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

अनंत पदों के लिए गुणोत्तर श्रेणी का योग

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$, जहां $r < 1$

उदाहरण:- गुणोत्तर श्रेणी 3, 18, 108, ..., 23328 में कितने पद हैं ?
(a) 4 (b) 8 (c) 6 (d) 10

हल:- गुणोत्तर श्रेढ़ी :- 3, 18, 108, ..., 23328
पहला पद ⇒ a = 3 ,
सार्व अनुपात $(r) \rightarrow \frac{\text{दूसरा पद}}{\text{पहला पद}} = 6$
गुणोत्तर श्रेढ़ी का n वां पद → $T_n = ar^{n-1}$
⇒ $23328 = 3 \times (6)^{n-1} \Rightarrow (6)^5 = (6)^{n-1}$
पदों की संख्या $(n) = 6$

उदाहरण:- निम्न गुणोत्तर श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए:
$\frac{8}{5}, \frac{8}{25}, \frac{8}{125}, \frac{8}{625}$, ... n पदों तक
(a) $2(1 - (\frac{1}{5})^n)$ (b) $4(1 - (\frac{1}{5})^n)$
(c) $\frac{2}{5}(1 - (\frac{1}{5})^n)$ (d) $\frac{5}{4}(1 - (\frac{1}{5})^n)$

हल:- प्रश्न के अनुसार ,

सार्व अनुपात (r) = $\frac{\text{दूसरा पद}}{\text{पहला पद}} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{8}{5}} = \frac{1}{5}$

$s_n = \frac{a\{1-(r)^n\}}{(1-r)} = \frac{\frac{8}{5}\{1-(\frac{1}{5})^n\}}{(1-\frac{1}{5})} = \frac{\frac{8}{5}\{1-(\frac{1}{5})^n\}}{\frac{4}{5}}$

$= 2\{1 - (\frac{1}{5})^n\}$

ज्यामितीय माध्य:- n अवलोकनों वाली श्रृंखला का (G.M) मानों के गुणनफल का nवाँ मूल है।

1). यदि x और y के बीच ज्यामितीय माध्य G है तो, $G = \sqrt{xy}$

2). सामान्य तौर पर, यदि a, b, c, d ..... n पद GP में हैं,
तो उनका ज्यामितीय माध्य (GM) = $\sqrt[n]{a.b.c .....n \text{ पद}}$

3). विषम क्रमागत पद में GP :- $\frac{a}{r}$, a , ar

4). सम क्रमागत पद में जीपी :- $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}$, ar , ar^2

A.M. और G.M के बीच संबंध

माना A और G दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं x और y का AM और GM हैं

$A = \frac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$

$A - G = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$ ....(i)

समीकरण(i) से हमें संबंध प्राप्त होता है

$A.P \geq G.P$

उदाहरण:- यदि दो प्रेक्षणों के समांतर माध्य और गुणोत्तर माध्य क्रमशः 10 और 5 हैं, तो प्रेक्षणों के वर्गों का योग ज्ञात कीजिए।
RRB NTPC CBT - I 11/03/2021 (Evening)
(a) 295 (b) 275 (c) 225 (d) 350

हल:- अंकगणित माध्य = 10
मान लीजिए कि संख्याएँ a और b हैं,
प्रश्न के अनुसार,
$a + b = 20$ और, $\sqrt{ab} = 5$, $ab = 25$
अभी, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$= 20^2 = a^2 + b^2 + 2 \times 25$
$= 400 = a^2 + b^2 + 50 \Rightarrow a^2 + b^2 = 350$

@apna_pdf

हरात्मक श्रेणी (Harmonic Progression)

हरात्मक श्रेणी , समांतर श्रेणी का व्युत्क्रम है।

HP = $\frac{1}{AP}$

हरात्मक माध्य (Harmonic mean) :-

1). यदि x और y के बीच हरात्मक माध्य (Harmonic mean) H हो तो,

H = $\frac{2xy}{x+y}$

2). सामान्य तौर पर, यदि a_1 , a_2 , a_3 , a_4 .....a_n पद HP में हैं, तो उनका HM होगा

HM = $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}+.....+\frac{1}{a_n}}$

दो सकारात्मक संख्याओं a और b के AM, GM, HM के बीच संबंध

i) यदि AM = $\frac{a+b}{2}$, GM = $\sqrt{ab}$, और HM = $\frac{2ab}{a+b}$

ii) AM ≥ GM ≥ HM.

iii) G^2 = A × H और इसलिए A, G, H गुणोत्तर श्रेणी में हैं ।

@apna_pdf

सरलीकरण

जटिल अंकगणितीय व्यंजक का सरल रूप में रूपांतरण सरलीकरण कहलाता है।

VBODMAS नियम

V- रेखा कोष्ठक या बार **('Bar bracket')** '---'
* सबसे पहले रेखा कोष्ठक यानि बार को हल करेंगे -
उदाहरण :- $(7 - \overline{5 - 4}) = ?$
पहले (5 - 4) को हल करें फिर 7 -1 = 6 को हल करें।
B (Brackets)-कोष्ठकों को निम्नलिखित क्रम में हल करना है-
- छोटे कोष्ठक या वृत्ताकार कोष्ठक (Small brackets) '()'
- मध्य कोष्ठक (Curly bracket) '{}'
- वर्गाकार ब्रैकेट (Big bracket) '[]'

* मापांक(Modulus) के लिए उदा.
|-3| इस मामले में हम केवल परिमाण लिखते हैं, चिह्न नहीं अर्थात 3 (केवल)
O (of) - 'का' का संक्रिया किया जाता है।
D (Division) - 'भाग' की संक्रिया की जाती है।
M (Multiplication) - 'गुणन' की संक्रिया की जाती है।
A (Addition) - 'जोड़' की संक्रिया की जाती है।
S (Subtraction) - 'घटाव' संक्रिया की जाती है।
नोट :- हम सवालों को इसी क्रमानुसार (**VBODMAS**) हल करते है।

उपरोक्त परिचालनों का क्रम दिए गए क्रम के समान है और बाएं से दाएं लागू किया गया है-

V B O D M A S

वास्तविक संख्या,सूचकांक,करणी घातांक और कुछ श्रंखलाओ के लिए सरलीकरण नीयम

उदाहरण :- सरलीकृत करे ?
$35 + 25 - [15 - \{13 \times (\overline{2 + 1})\}]$
हल :- $35 + 25 - [15 - \{13 \times (\overline{2 + 1})\}]$
$35 + 25 - [15 - \{13 \times 3\}]$
$35 + 25 - [15 - 39]$
$35 + 25 - [-24]$
$35 + 25 + 24 = 84$

प्रमुख बिंदु :-

1). यदि $\sqrt{?} = x$, तो आवश्यक संख्या (?) = x^2 होगी।

2). $\sqrt{a^4 \times b^4 \times c^4} = a^2b^2c^2$

3). $\sqrt{a^n \times b^m} = a^{\frac{n}{2}} \times b^{\frac{m}{2}}$

4). $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

5). $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

6). अगर किसी दिए गए संख्या में, अंकों की कुल संख्या n है और यदि n सम है, तो उस संख्या के वर्गमूल में $\frac{n}{2}$ अंक होंगे और यदि n विषम है, तो अंकों की संख्या $\frac{n+1}{2}$ होगी।

उदाहरण :- 25 और 225 के वर्गमूल में क्रमशः कितने अंक होते हैं ?
हल :- 25 में अंकों की कुल संख्या = 2 (सम)
25 के वर्गमूल में अंक = $\frac{n}{2} = \frac{2}{2}$ = 1 (i.e. 5)

225 में अंकों की कुल संख्या = 3 (विषम)
225 के वर्गमूल में अंक = $\frac{3+1}{2}$ = 2 (i.e. 15)

7). $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...n}}} = x^{\frac{2^n - 1}{2^n}}$

उदाहरण :- $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}$ का मान ज्ञात कीजिए ?
हल :- यहां, n = 5,
$\therefore \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}} = 2^{\frac{2^5 - 1}{2^5}} = 2^{\frac{31}{32}}$

8). $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...\infty}}} = x$;

उदाहरण :- $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7...\infty}}} = 7$

9). $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...\infty}}}$ के मानो का पता लगाने के लिए, x के गुणांकों का पता लगाएं, ऐसा कि गुणांकों के बीच का अंतर 1 होना चाहिए है, तो बड़ा गुणांक परिणाम होगा।

10). $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - ...\infty}}}$ के मान का पता लगाने के लिए, x के गुणांकों का पता लगाएं, ऐसा कि गुणांकों के बीच का अंतर 1होना चाहिए है, तो छोटा गुणांक परिणाम होगा।

उदाहरण :- $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + ...\infty}}}$ का मान ज्ञात कीजिए ?
हल :- माना $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + ...\infty}}} = x$
$\Rightarrow \sqrt{12 + x} = x$
$\Rightarrow 12 + x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$
$\Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0$
$\Rightarrow x = 4$ और $x = -3$
$\therefore x = 4$
Exam hall approach:- 1 के अंतर के साथ 12 के गुणांक 4, 3 हैं यहां, 4 बड़ी संख्या है. अतः मान 4 होगा।

उदाहरण :- $\sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{30 - ...\infty}}}$ का मान ज्ञात कीजिए ?
हल :- 1 के अंतर के साथ 30 के गुणांक 5, 6 हैं यहां 5 छोटी संख्या है, अतः मान 5 होगा।

11). यदि कोई संख्या $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ रूप में है, तब हम उसे उसके परिमेयकरण गुणांक $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ को अंश और हर दोनों में गुणा करते है।

उदाहरण :- $\frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{8}}$ का मान ज्ञात कीजिए ?
हल :- $\frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{9} + \sqrt{8}}{\sqrt{9} + \sqrt{8}}$
$= \frac{\sqrt{9} + \sqrt{8}}{(\sqrt{9})^2 - (\sqrt{8})^2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1} = 3 + 2\sqrt{2}$

@apna_pdf

घन और घनमूल

प्रमुख बिंदु :-

1). यदि एक संख्या में दो बार अपने आप से गुणा किया जाता है, तो इस गुणन के परिणाम को उस संख्या का घन कहा जाता है।

i.e. :- $2 \times 2 \times 2 = 2^3$

2^3 का घनमूल $= \sqrt[3]{2^3} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

2). घन की गणना करने के लिए बीजगणतीय विधि:

$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$

महत्वपूर्ण सूत्र

1). $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2). $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3). $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

4). $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

5). $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

6). $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

7). $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

8). $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$

$(a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

यहां, यदि $(a + b + c) = 0$, तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

9). $(a + b + c)^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2(ab + bc + ca)$

रेखाकोष्ठक अर्थात बार आधारित अवधारणा :-

$0.\overline{x} = \frac{x}{9}$	$0.x\overline{yz} = \frac{xyz - x}{990}$
$0.\overline{xy} = \frac{xy}{99}$	$0.xy\overline{z} = \frac{xyz - xy}{900}$

उदाहरण :- $0.\overline{23} + 0.1\overline{43} - 0.\overline{2}$ का मान ज्ञात कीजिए ?

हल :- $\frac{23}{99} + \left(\frac{143 - 1}{990}\right) - \frac{2}{9}$

$= \frac{230 + 142 - 220}{990} = \frac{152}{990} = 0.1\overline{53}$

सतत भिन्न

उदाहरण :- $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{5}}}}} = ?$

हल :-

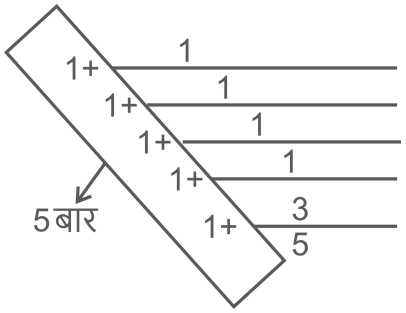
चरण 1: सबसे पहले अंतिम पद लिखें $(\frac{3}{5})$

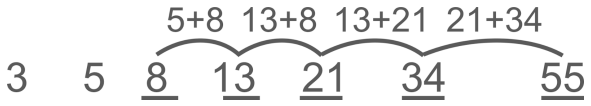
चरण 2: पहले '3' लिखें और फिर '5' लिखें

3 5

चरण 3: जितनी बार प्रश्न में '1' दिया हो उतनी बार आगे संख्याएँ आएगी , और अगली संख्या ज्ञात करने के लिए तुरंत पिछले वाली संख्या को उस संख्या मे जोड़े।

जैसे :- 5 + 3 = 8 , 8 + 5 = 13 .....





चरण 4 : और अंत में, अंतिम संख्या को उसके ठीक पहले वाली संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें। आवश्यक संख्या = $\frac{55}{34}$

उदाहरण :- $1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \frac{3}{5}}}}} = ?$

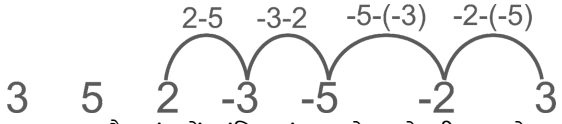
हल :-

चरण1: सबसे पहले अंतिम पद लिखें $(\frac{3}{5})$

चरण 2 : पहले '3' लिखें और फिर '5' लिखें

3 5

चरण 3 : जितनी बार प्रश्न में '1' दिया हो उतनी बार तुरंत पिछली संख्या से अगली संख्या घटा दें।



चरण 4 : और अंत में, अंतिम संख्या को उसके ठीक पहले वाली संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें। आवश्यक संख्या = $-\frac{3}{2}$

उदाहरण :- $1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = ?$

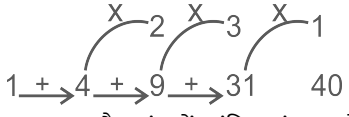
हल :-

चरण 1: सबसे पहले अंतिम पद लिखें $(\frac{1}{4})$

चरण 2: पहले '1' लिखें और फिर '4' लिखें

1 4

चरण 3:



चरण 4: और अंत में, अंतिम संख्या को उसके ठीक पहले वाली संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें । आवश्यक संख्या = $\frac{40}{31}$

@apna_pdf

उदाहरण :- $5 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2 - \frac{1}{5}}} = ?$

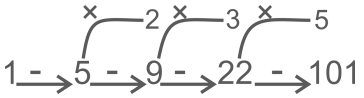
हल :-

चरण 1: सबसे पहले अंतिम पद लिखें $(\frac{1}{5})$

चरण 2 : पहले '1' लिखें और फिर '5' लिखें

1 5

चरण 3 :

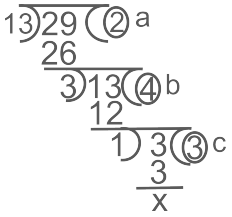


चरण 4 : और अंत में, अंतिम संख्या को उसके ठीक पहले वाली संख्या के साथ भिन्न के रूप में लिखें। आवश्यक संख्या = $\frac{101}{22}$

उदाहरण :- $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \frac{1}{c}}} = \frac{13}{29}$,

तो a + b - c = ? का मान ज्ञात करे ?

हल :- यहां



⇒ a = 2 , b = 4 , c = 3

इसलिए a + b - c = 2 + 4 - 3 = 3

मिश्रित संख्या $(p\frac{q}{r})$ पर आधारित प्रश्न

Type - 1

श्रृंखला आधारित :-

उदाहरण :- $999\frac{1}{5} + 999\frac{2}{5} + ...+ 999\frac{4}{5}$

$999 \times 4 + \cfrac{1 + 2 + 3 + 4}{5} = 3996 + \cfrac{\frac{4 \times 5}{2}}{5} = 3996 + 2 = 3998$

Type - 2

उदाहरण :-

$55\frac{2}{3} + 45\frac{4}{5} + 41\frac{11}{15} = 55 + \frac{2}{3} + 45 + \frac{4}{5} + 41 + \frac{11}{15}$

$= 141 + (\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{11}{15}) = 141 + (\frac{10 + 12 + 11}{15})$

$= 141 + \frac{33}{15} = 141 + \frac{11}{5} = 141\frac{11}{5}$

$= 141 + 2 + \frac{1}{5} = 143\frac{1}{5}$

Type - 3

यदि अंश और हर के बीच अंतर 1 हो

उदाहरण :- $\frac{1}{7} + (9999\frac{692}{693}) \times 99$

यहां 693 - 692 = 1 तो हम लिख सकते हैं $\frac{692}{693} = 1 - \frac{1}{693}$

$= \frac{1}{7} + (9999 + 1 - \frac{1}{693}) \times 99$

$= \frac{1}{7} + (10000 - \frac{1}{693}) \times 99$

$= \frac{1}{7} + 990000 - \frac{99}{693} = 990000$

Type - 4

यदि किसी संख्या का हर उसके गुणज के समान हो

उदाहरण :- $45\frac{92}{99} \times 99$

⇒ 92 में 7 जोड़ें ताकि यह हर के समान 99 हो जाए।

$45\frac{(92 + 7)}{99} \times 99 = (45 + 1) \times 99 = 4554$

अब परिणाम में से 7 घटाएं = 4554 - 7 = 4547

भिन्न की तुलना आधारित प्रश्न

उदाहरण :- आरोही क्रम में लिखें ?

$\frac{2}{3}, \frac{8}{6}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$

हल :- (3, 6, 4, 2) का L.C.M = 12

$\frac{2}{3} \times 12, \frac{8}{6} \times 12, \frac{5}{4} \times 12, \frac{3}{2} \times 12$

8, 16 , 15 , 18

यह स्पष्ट है कि, 8 < 15 < 16 < 18

तो, आरोही क्रम = $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{8}{6}, \frac{3}{2}$

@apna_pdf

बीजगणित

वर्ग सूत्र

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
3. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
5. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

उदाहरण :- $(k - \frac{1}{k})(k^2 + \frac{1}{k^2})(k^4 + \frac{1}{k^4})(k^8 + \frac{1}{k^8})(k^{16} + \frac{1}{k^{16}})$ का मान क्या होगा ?
SSC CHSL 15/03/2023 (2nd Shift)
(a) $k^{64} - \frac{1}{k^{64}}$ (b) $\frac{k^{32} - \frac{1}{k^{32}}}{k - \frac{1}{k}}$ (c) $(k^{32} - \frac{1}{k^{32}})$ (d) $\frac{k^{32} - \frac{1}{k^{32}}}{k + \frac{1}{k}}$

हल:-
नोट :- दिए गए पदों को $(a + b)(a - b)$ में बदलना है $(k + \frac{1}{k})$ से गुणा और भाग करने पर :

$$= \frac{(k + \frac{1}{k})}{(k + \frac{1}{k})} \times (k - \frac{1}{k})(k^2 + \frac{1}{k^2})(k^4 + \frac{1}{k^4})(k^8 + \frac{1}{k^8})(k^{16} + \frac{1}{k^{16}})$$

$$= \frac{(k^2 - \frac{1}{k^2})(k^2 + \frac{1}{k^2})(k^4 + \frac{1}{k^4})(k^8 + \frac{1}{k^8})(k^{16} + \frac{1}{k^{16}})}{(k + \frac{1}{k})}$$

$$= \frac{(k^4 - \frac{1}{k^4})(k^4 + \frac{1}{k^4})(k^8 + \frac{1}{k^8})(k^{16} + \frac{1}{k^{16}})}{(k + \frac{1}{k})}$$

$$= \frac{(k^8 - \frac{1}{k^8})(k^8 + \frac{1}{k^8})(k^{16} + \frac{1}{k^{16}})}{(k + \frac{1}{k})}$$

$$= \frac{(k^{16} - \frac{1}{k^{16}})(k^{16} + \frac{1}{k^{16}})}{(k + \frac{1}{k})} = \frac{(k^{32} - \frac{1}{k^{32}})}{(k + \frac{1}{k})}$$

6. $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
7. $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2$
8. $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 + 2$
9. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
10. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
11. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

अगर $a = b = c = k$ तब, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

उदाहरण :- यदि $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ और $ab + bc + ca = 8$ है, तो $(a + b + c) - 3$ का संभावित मान क्या है ?
SSC CGL 03/12/2022 (4th Shift)
(a) 5 (b) 3 (c) 9 (d) 2

हल:- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$
$(a + b + c)^2 = 9 + 2 \times 8$
$a + b + c = 5$
अब, $(a + b + c) - 3 = 5 - 3 = 2$

घन सूत्र

- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$
- $a^3 + \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})^3 - 3(a + \frac{1}{a})$
- $a^3 - \frac{1}{a^3} = (a - \frac{1}{a})^3 + 3(a - \frac{1}{a})$

परीक्षाओ में सर्वाधिक दोहराए जाने वाले सूत्र

1). $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

उदाहरण:- यदि $a + b + c = 5$, $a^3 + b^3 + c^3 = 85$ और $abc = 25$, है, तो $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ का मान ज्ञात कीजिए।
SSC CGL 13/12/2022 (4th Shift)
(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8
हल:- सूत्र : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$\Rightarrow 85 - 3 \times 25 = 5(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$\Rightarrow 85 - 75 = 5(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$\Rightarrow 10 = 5(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{10}{5} = 2$

2). $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

उदाहरण:- $x = 222$, $y = 223$ और $z = 224$ है, तो $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान ज्ञात कीजिए।
SSC CGL 12/12/2022 (4th Shift)
(a) 2007 (b) 2004 (c) 2006 (d) 2005
हल:- सूत्र : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z - x)^2]$

$$= \frac{(222 + 223 + 224)}{2}$$
$$[(222-223)^2 + (223-224)^2 + (224-222)^2]$$
$$= \frac{669}{2}[(-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2]$$
$$= \frac{669}{2} \times 6 = 2007$$

3) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)]$

@apna_pdf

उदाहरण:- यदि a + b + c = 5 और ab + bc + ca = 7, है तो $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ का मान क्या होगा ?
SSC CPO 05/10/2023 (1st Shift)
(a) 20 (b) 25 (c) 15 (d) 30
हल:- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ = (a + b + c)[$(a + b + c)^2$ - 3(ab + bc + ca)]
= (5) [$(5)^2$ - 3(7) = 5 (4) = 20

4) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2\right]$

उदाहरण:-. यदि x + y + z = 8, और $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ है , तो $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान _____ होगा।
SSC CPO 09/11/2022 (Evening)
(a) 16 (b) 10 (c) 15 (d) – 16
हल:- प्रयुक्त सूत्र :

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2\right]$

$= \frac{1}{2}(8)$ [3 (20) - $(8)^2$ = 4 [60 - 64] = -16

- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
- $= a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ जब $(a + b + c) = 0$ or $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$
- जब, $(a + b + c) = 0$; $a \neq b \neq c$
  $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$; a = b = c
- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c)$
- $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
- यदि $(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, जब $x = 0, y = 0, z = 0$

बढ़ने वाले घातांकों के लिए

1) यदि $x + \frac{1}{x} = a$, तब $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

उदाहरण:- यदि $(a + \frac{1}{a}) = 6$, तो $\frac{3}{4}(a^2 + \frac{1}{a^2})$ का मान क्या है?
SSC CHSL 02/08/2023 (2nd Shift)
(a) 22.5 (b) 34 (c) 25.5 (d) 36
हल:- प्रश्न के अनुसार,
$a + \frac{1}{a} = 6$
$a^2 + \frac{1}{a^2} = (6)^2 - 2 = 34$
अब , $\frac{3}{4}(a^2 + \frac{1}{a^2}) = \frac{3}{4} \times 34 = \frac{51}{2} = 25.5$

2) यदि $x - \frac{1}{x} = a$, तब $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$

उदाहरण:- यदि $(x - \frac{1}{x}) = 0.4$, और x > 0, तो $(x^2 + \frac{1}{x^2})$ का मान क्या है।
SSC CHSL 07/08/2023 (2nd Shift)
(a) 4.16 (b) 3.32 (c) 1.84 (d) 2.16
हल:- $x - \frac{1}{x} = 0.4$
$x^2 + \frac{1}{x^2} = (0.4)^2 + 2 = 2.16$

3) यदि $x + \frac{1}{x} = a$, तब $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$

उदाहरण:- यदि $2x + \frac{2}{x} = 5$, तो $(x^3 + \frac{1}{x^3} + 2)$ का मान क्या होगा ?
SSC CHSL 02/08/2023 (1st Shift)
(a) $\frac{81}{11}$ (b) $\frac{81}{7}$ (c) $\frac{71}{8}$ (d) $\frac{81}{8}$
हल:- $2x + \frac{2}{x} = 5 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$
$x^3 + \frac{1}{x^3} = (\frac{5}{2})^3 - 3 \times (\frac{5}{2}) = \frac{65}{8}$
$x^3 + \frac{1}{x^3} + 2 = \frac{65}{8} + 2 = \frac{81}{8}$

4) यदि $x - \frac{1}{x} = a$, तब $x^3 - \frac{1}{x^3} = a^3 + 3a$

उदाहरण:- यदि $(y - \frac{1}{y}) = 9$, तो $(y^3 - \frac{1}{y^3})$ का मान ज्ञात कीजिए ।
SSC CHSL 04/08/2023 (3rd Shift)
(a) 766 (b) 756 (c) 702 (d) 729
हल:- $y - \frac{1}{y} = 9$
$y^3 - \frac{1}{y^3} = (9)^3 + 3 \times 9 = 756$

5) यदि $x + \frac{1}{x} = a$, तब $x^4 + \frac{1}{x^4} = (a^2 - 2)^2 - 2$

उदाहरण:- यदि $\frac{x^2 + 1}{x} = 5$, तो $x^4 + \frac{1}{x^4} - 36$
का मान ज्ञात कीजिए।
SSC CHSL 09/08/2023 (2nd Shift)
(a) 491 (b) 149 (c) 419 (d) 194
हल:- $x + \frac{1}{x} = 5$
$x^2 + \frac{1}{x^2} = 5^2 - 2 = 23$
$x^4 + \frac{1}{x^4} = 23^2 - 2 = 527$
अब , $x^4 + \frac{1}{x^4} - 36 = 527 - 36 = 491$

6) यदि $x - \frac{1}{x} = a$, तब $x^4 + \frac{1}{x^4} = (a^2 + 2)^2 - 2$

उदाहरण:- यदि $(x - \frac{1}{x}) = 10$ है, तो $(x^4 + \frac{1}{x^4})$ का मान क्या है?
SSC CGL 26/07/2023 (3rd shift)
(a) 10404 (b) 10402
(c) 10406 (d) 10400

@apna_pdf

हल:- दिया गया है, $x - \frac{1}{x} = 10$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = (10)^2 + 2 = 102$

अब, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 102 \times 102 - 2 = 10402$

7) यदि $x + \frac{1}{x} = a$, तब $x^5 + \frac{1}{x^5} = (a^2 - 2)(a^3 - 3a)$ - (a)

या

$(x^5 + \frac{1}{x^5}) = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3}) - (x + \frac{1}{x})$

उदाहरण:- यदि $(x + \frac{1}{x}) = 5$, तो $(x^5 + \frac{1}{x^5})$ का मान क्या है ?

SSC CHSL 07/08/2023 (2nd Shift)

(a) 2535 (b) 2540 (c) 2515 (d) 2525

हल:- $x + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 110$

अब ,

$x^5 + \frac{1}{x^5} = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3}) - (x + \frac{1}{x})$

$\Rightarrow 23 \times 110 - 5 = 2530 - 5 = 2525$

8) यदि $x - \frac{1}{x} = a$, तब $x^5 - \frac{1}{x^5} = (a^2 + 2)(a^3 + 3a)$ - (a)

या

$x^5 - \frac{1}{x^5} = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 - \frac{1}{x^3}) - (x - \frac{1}{x})$

उदाहरण:- यदि $(y - \frac{1}{y}) = -9$, तो $(y^5 - \frac{1}{y^5})$ का मान क्या होगा ?

SSC CHSL 08/08/2023 (4th Shift)

(a) −62757 (b) −62748

(c) −62739 (d) −59049

हल:-

$(y - \frac{1}{y}) = -9 \Rightarrow (y^2 + \frac{1}{y^2}) = 83$

और $(y^3 - \frac{1}{y^3}) = (-9)^3 + 3 \times (-9)$

$= -756$

$y^5 - \frac{1}{y^5} = \{(y^2 + \frac{1}{y^2})(y^3 - \frac{1}{y^3})\} - (y - \frac{1}{y})$

$= \{83 \times (-756)\} - (-9)$

$= \{(-62748)\} - (-9) = (-62739)$

9) यदि $x + \frac{1}{x} = a$, तब $x^6 + \frac{1}{x^6} = (a^3 - 3a)^2$ - (2)

उदाहरण:- यदि $(x + \frac{1}{x}) = 2\sqrt{2}$ और x > 1 है, तो $(x^6 - \frac{1}{x^6})$ का मान क्या होगा ?

SSC CGL 19/07/2023 (1st shift)

(a) $140\sqrt{2}$ (b) $116\sqrt{2}$ (c) $144\sqrt{2}$ (d) $128\sqrt{2}$

हल:- $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$

$x - \frac{1}{x} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4} = 2$

$x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})^3 + 3(x - \frac{1}{x})$

$= (2)^3 + 3 \times 2 = 14$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x})$

$= (2\sqrt{2})^3 - 3 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

अब ,

$x^6 - \frac{1}{x^6} = (x^3 - \frac{1}{x^3})(x^3 + \frac{1}{x^3})$

$\Rightarrow x^6 - \frac{1}{x^6} = 14 \times 10\sqrt{2} = 140\sqrt{2}$

10) यदि $x + \frac{1}{x} = a$, तब $x^6 - \frac{1}{x^6} = (a^3 - 3a)(a^3 + 3a)$

उदाहरण:- यदि $(x + \frac{1}{x}) = 5\sqrt{2}$, और x > 1, तो $(x^6 - \frac{1}{x^6})$ का मान क्या है?

SSC CHSL 02/08/2023 (2nd Shift)

(a) $22970\sqrt{23}$ (b) $23030\sqrt{23}$

(c) $23060\sqrt{23}$ (d) $22960\sqrt{23}$

हल:- $x + \frac{1}{x} = 5\sqrt{2}$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = (5\sqrt{2})^3 - 3(5\sqrt{2})$

$= 250\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = 235\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = \sqrt{(x^3 + \frac{1}{x^3})^2 - 4}$

$= \sqrt{(235\sqrt{2})^2 - 4}$

$= \sqrt{110450 - 4} = \sqrt{110446}$

$= 49\sqrt{46}$

अब , $x^6 - \frac{1}{x^6} = (x^3 + \frac{1}{x^3})(x^3 - \frac{1}{x^3})$

$= 235\sqrt{2} \times 49\sqrt{46}$

$= 235 \times 49 \times 2 \times \sqrt{23} = 23030\sqrt{23}$

समांतर घातांक के लिए

1.	If $x + \frac{1}{x} = a$, तब $x - \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 - 4}$
2.	If $x - \frac{1}{x} = a$, तब $x + \frac{1}{x} = \sqrt{a^2 + 4}$
3.	If $x + \frac{1}{x} = a$, तब $x^2 - \frac{1}{x^2} = a\sqrt{a^2 - 4}$
4.	If $x - \frac{1}{x} = a$, तब $x^2 - \frac{1}{x^2} = a\sqrt{a^2 + 4}$

@apna_pdf

कुछ विशेष परिस्थितियाँ :-

1) यदि $x + \frac{1}{x} = 2$, तब $x = 1$

यदि $x + \frac{1}{x} = -2$, तब $x = -1$

उदाहरण :- यदि $x + \frac{1}{x} = 2$, तब $x^{64} + x^{121}$ का मान क्या होगा ?

(a) 2 (b) - 2 (c) 1 (d) 3

हल :- $x + \frac{1}{x} = 2 ; x = 1$

$= 1^{64} + 1^{121} = 2$

2) यदि $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3}$, तब $x^6 = -1$

उदाहरण :- यदि $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$, तब $x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$ का मान क्या है :

(a) 1 (b) - 1 (c) 0 (d) - 2

हल :- $x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$

$= x^6 (x^6 + 1) + x^3(x^6 + 1) + 1 = x^6 (-1 + 1) + x^3(-1 + 1) + 1 = 1$

शॉर्ट ट्रिक :- यदि दो पदों के बीच घातीय अंतर 6 है तो उनका मान शून्य हो जाता है।

$x^{12} + x^9 = 0$

3) यदि $x + \frac{1}{x} = 1$, तब $x^3 = -1$

यदि $x + \frac{1}{x} = -1$, तब $x^3 = 1$

उदाहरण :- यदि $x + \frac{1}{x} = 1$, तब $x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$ का मान क्या है ?

SSC CGL 06/12/2022 (1st Shift)

(a) 1 (b) - 1 (c) 0 (d) - 2

हल :- $x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1$

$= x^9 (x^3 + 1) + x^3(x^3 + 1) + 1 = x^9 (-1 + 1) + x^3(-1 + 1) + 1 = 1$

शॉर्ट ट्रिक :- यदि दो पदों के बीच घातीय अंतर 3 है तो उनका मान शून्य हो जाता है।

$x^{12} + x^9 = 0$

कुछ विशेष परिस्थितियाँ :-

- यदि $a^2 - ab + b^2 = 0$ तब $a^3 + b^3 = 0$
- यदि $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$ तब $a^3 + b^3 = 0$
- यदि $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a+b}$ तब $a^3 - b^3 = 0$
- यदि $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -1$ तब $a^3 - b^3 = 0$
- यदि $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$ तब $a^3 + b^3 = 0$
- यदि $a^2 + a + 1 = 0$ तब $a^3 - 1 = 0$ या $a^3 = 1$
- यदि $ab(a + b) = 1$ तब $\frac{1}{a^3 b^3} - a^3 - b^3 = 3$

योगांतरानुपात विधि

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

यदि $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a}{b}$ तो $\frac{c}{d} = \frac{c+d}{c-d}$

- यदि $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$ तो व्यंजक में x = a, y = b, z = c रखकर हम व्यंजक का मान ज्ञात कर सकते हैं।
- यदि x + y = a, तब xy अधिकतम होगा जब x = y होगा।
- यदि xy = a, तब (x + y) न्यूनतम होगा जब x = y = $\sqrt{a}$

पूर्ण वर्ग बहुपद बनाने के नियम :-

1. **मध्य पद =** $\pm\sqrt{\text{प्रथम पद} \times \text{तीसरा पद}} \times 2$
2. **प्रथम पद =** $\frac{(\text{मध्य पद})^2}{4 \times \text{तीसरा पद}}$
3. **तीसरा पद =** $\frac{(\text{मध्य पद})^2}{4 \times \text{प्रथम पद}}$

उदाहरण:- जांचें कि $9x^2 + 12xy + 4y^2$ बहुपद पूर्ण वर्ग है या नहीं ?

हल :-

चरण 1 :- हम यह जानते हैं कि,

मध्य पद = $\pm\sqrt{\text{प्रथम पद} \times \text{तीसरा पद}} \times 2$

$12 = \pm\sqrt{9 \times 4} \times 2 \Rightarrow 12 = 6 \times 2 \Rightarrow 12 = 12$

चरण 2:- प्रथम पद = $\frac{(\text{मध्य पद})^2}{4 \times \text{तीसरा पद}}$

$9 = \frac{(12)^2}{4 \times 4} \Rightarrow 9 = 9$

चरण 3 :- तीसरा पद = $\frac{(\text{मध्य पद})^2}{4 \times \text{प्रथम पद}}$

$4 = \frac{(12)^2}{4 \times 9} \Rightarrow 4 = 4$

अतः दिया गया बहुपद एक पूर्ण वर्ग है।

Exam hall approach : -

$9x^2 + 12xy + 4y^2 \Rightarrow (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2y + (2y)^2 \Rightarrow (3x + 2y)^2$

अतः दिया गया बहुपद एक पूर्ण वर्ग है।

अपरिमेय संख्याओं के लिए बीजगणितीय सूत्र

1.	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2.	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
3.	$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$
4.	$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
5.	$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

बीजगणितीय सूत्र

घातांक के नियम

गुणा के नियम	$a^x \times a^y = a^{x+y}$
भाग के नियम	$a^x \div a^y = a^{x-y}$

@apna_pdf

गुणा के नियम	$a^x \times a^y = a^{x+y}$
घातांक के घात नियम	$(a^x)^y = a^{xy}$
गुणनफल के घातांक के नियम	$(ab)^x = a^x b^x$
भिन्न के घातांक के नियम	$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$
शून्य घातांक	$a^0 = 1$
ऋणात्मक घातांक	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
भिन्नात्मक घातांक	$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

गुणक सूत्र

- $(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$
- $(x - a)(x - b) = x^2 - x(a + b) + ab$
- $(x - a)(x + b) = x^2 - x(a - b) - ab$
- $(x + a)(x - b) = x^2 + x(a - b) - ab$

इस प्रकार के समीकरणों में हम मान रख हल कर सकते है :-

- अगर $x + y = 2z$, तो $\frac{z}{x-z} + \frac{y}{y-z} = 1$ $(x \neq y \neq z)$
- यदि $x + y = 2z$, तब $\frac{x}{x-z} + \frac{y}{y-z} = 2$ $(x \neq y \neq z)$
- यदि $x = a + \frac{1}{a}$ और $y = a - \frac{1}{a}$ तब $\sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y^2} = 4$

उच्च घातांक सूत्र

1.) $x^4 - \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x})$

2.) $x^5 + \frac{1}{x^5} = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3}) - (x + \frac{1}{x})$

3.) $x^5 - \frac{1}{x^5} = (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 - \frac{1}{x^3}) - (x - \frac{1}{x})$

4.) $x^7 + \frac{1}{x^7} = (x^4 + \frac{1}{x^4})(x^3 + \frac{1}{x^3}) - (x + \frac{1}{x})$

5.) $x^7 - \frac{1}{x^7} = (x^4 + \frac{1}{x^4})(x^3 - \frac{1}{x^3}) + (x - \frac{1}{x})$

6.) $x^8 - \frac{1}{x^8} = (x^4 + \frac{1}{x^4})(x^2 + \frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x})$

कुछ अन्य परिणाम

1.) $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = 4$

2.) $\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{a^2 + b^2} = 2$

3.) यदि a + b + c = abc, तब

$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{ab} + \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{bc} + \frac{(1-c^2)(1-a^2)}{ca} = 4$

4.) यदि bc + ca + ab = abc तब ,

$\frac{(a+b)}{ab(c-1)} + \frac{(b+c)}{bc(a-1)} + \frac{(c+a)}{ca(b-1)} = 1$

5.) ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = (b - a)(b - c)(c - a)

6.) यदि $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ (जहां $a \neq b \neq c$) तब abc = ± 1

- यदि $x + y = 0$

  $x = -y, x = 0, y = 0$
- यदि $x^2 + y^2 = 0$

  $x^2 = -y^2, x^2 = 0, y^2 = 0$

उदाहरण :- यदि $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + z - 1)$, तो $x^3 + y^3 + z^3$ का मान बराबर होगा :

SSC CHSL 11/08/2023 (3rd Shift)

(a) 6 (b) 1 (c) 2 (d) 8

हल :- दिया गया है : $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + z - 1)$

$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2z - 2$

$x^2 - 2x + z^2 - 2z + 2 + y^2 = 0$

$x^2 - 2x + z^2 - 2z + y^2 + 2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 + z^2 - 2z + 1 + y^2 = 0$

$(x - 1)^2 + (z - 1)^2 + y^2 = 0$

$x = 1, z = 1, y = 0$

अब, $x^3 + y^3 + z^3 = 1 + 0 + 1 = 2$

शॉर्ट ट्रिक :- $(x, y, z.....)$ के किसी भी मान के लिए गुणक को 2 से भाग करके उसके दिए गए चिन्ह के साथ लिखे

समीकरण में जोड़ना या घटाना :-

उदाहरण :- यदि $\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = 1$, तब $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}$ का मान होगा :

हल :- समीकरण के दोनों पक्षों में 3 जोड़ने पर.

$\frac{a}{1-a} + 1 + \frac{b}{1-b} + 1 + \frac{c}{1-c} + 1 = 1 + 3$

$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 4$

उदाहरण :- यदि $x = 16$, तब $(x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 17)$ का मान होगा:

(a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) 2

हल :- $x^4 - 16x^3 - x^3 + 16x^2 + x^2 - 16x - x + 17$

$= x^4 - x.x^3 - x^3 + x.x^2 + x^2 - x.x - x + 17$

$= x^4 - x.x^3 - x^3 + x.x^2 + x^2 - x.x - x + 17 = -x + 17 = -16 + 17 = 1$

@apna_pdf

घातांक और करणी

घातांक

घातांक संख्यात्मक मान हैं जो किसी विशेष संख्या के लिए घात या प्रतिपादक के रूप में कार्य करते हैं।

जैसे :- a^n

यहाँ 'a' कोई संख्या है और इसे a^n का आधार कहा जाता है।

'n' कोई प्राकृतिक संख्या है और इसे a^n का सूचकांक या घातांक कहा जाता है।

घातांकों के नियम

(1). $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (2). $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (3). $(a^m)^n = a^{mn}$

(4). $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ (5). $a^0 = 1$ (6). $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(7). $p^{-n} = \frac{1}{p^n}$ (8). $(ab)^n = a^n \times b^n$ (9). $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

यदि 'a' ऋणात्मक संख्या है और n एक विषम संख्या है तो $(-a)^n = -a^n$

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :-

1. यदि $a^m = k$, तो $a = (k)^{\frac{1}{m}}$ होगा ।

2. यदि $a^{\frac{1}{m}} = k$, तो $a = k^m$ होगा ।

3. यदि $a^m = b^n$, तो $a = (b)^{\frac{n}{m}}$ और $b = (a)^{\frac{m}{n}}$

4. यदि $a^m = a^n$, तो $m = n$,

5. $(a^m - 1)$ और $(a^n - 1)$ का महत्तम

समापवर्तक $(a^{\text{m,n का महत्तम समापवर्तक}} - 1)$ के बराबर होगा ।

करणी

जब परिमेय संख्या का मूल सटीक रूप से प्राप्त नहीं किया जा सकता है, तो उस मूल को करणी कहा जाता है।

जैसे:- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ आदि.

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{6}$ आदि.

लेकिन $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[5]{32} = 2$ करणी नहीं हैं।

अतः , हम कह सकते हैं कि "सभी करणी संख्याएँ अपरिमेय संख्याएँ हैं लेकिन सभी अपरिमेय संख्याएँ करणी नहीं हैं।

करणी में, $\sqrt[n]{a}$, n के मान को क्रम कहा जाता है और a को मूलांक कहा जाता है।

करणी के प्रकार :-

सरल करणी :- सरल करणी में एक ही संख्या होती है, जिसे एकपदी भी कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, $\sqrt{2}$.

समान करणी :- समान करणी में एक सामान्य मूल कारक होता है।

जैसे:- $3\sqrt{2}$. और $7\sqrt{2}$

मिश्रित करणी :- मिश्रित करणी को एक परिमेय संख्या के साथ एक अपरिमेय संख्या के गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

जैसे:- $3\sqrt{7}$ और $2\sqrt{6}$.

कंपाउंड करणी :- एक कंपाउंड करणी में दो या दो से अधिक करणी का बीजगणितीय जोड़ या घटाव होता है।

जैसे:- $(\sqrt{6} + \sqrt{3})$

संयुग्मी या पूरक करणी :-

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ रूप के प्रत्येक करणी के लिए एक और करणी $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ मौजूद होता है जिसे पिछले करणी का संयुग्म करणी कहा जाता है ।

जैसे:- $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{3})$ और $(2\sqrt{3} - 5\sqrt{3})$ संयुग्मी करणी के युग्म हैं।

करणी के नियम

(1). $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (2). $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(3). $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (4). $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

(5). $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ (6). $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

उदाहरण :- यदि $3\sqrt{5}$ दिया गया है, तो परिमेयकरण गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल :- $3\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 3 \times 5 = 15$,

अतः $3\sqrt{5}$ का परिमेयकरण गुणनखंड $\sqrt{5}$ है।

परिमेयकरण :- दो या दो से अधिक योगों को गुणा करके एक परिमेय संख्या बनाना, परिमेयकरण कहलाता है।

➢ यदि कोई संख्या $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ रूप में है, तब हम उसे उसके परिमेयकरण गुणांक $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ को अंश और हर दोनों में गुणा करते है ।

उदाहरण :- $\frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{8}}$ का मान ज्ञात कीजिए ?

हल :- $\frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{8}}$ मे परिमेयकरण करने पर

$= \frac{1}{\sqrt{9} - \sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{9} + \sqrt{8}}{\sqrt{9} + \sqrt{8}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1} = 3 + 2\sqrt{2}$

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :-

(1). यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\ldots\infty}}}$ तब, $y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$

नोट :- $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\infty}}}$ के मानो का पता लगाने के लिए, x के गुणांकों का पता लगाएं, ऐसा कि गुणांकों के बीच का अंतर 1 होना चाहिए है, तो बड़ा गुणांक परिणाम होगा ।

उदाहरण :- $y = \sqrt{72 + \sqrt{72 + \sqrt{72 + \ldots\ldots\infty}}}$

हल :- हम जानते है कि,

$\Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\times72}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 288}}{2}$

$= \frac{1 + \sqrt{289}}{2} = \frac{1 + 17}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Exam Hall Approach :-

72 को दो क्रमिक पूर्णांकों अर्थात 8 × 9 के रूप में गुणनखंड करे यदि श्रेणी जोड़ की है तो बड़ा वाला पूर्णांक उतर होगा इसलिए 9 उतर होगा ।

(2). यदि $y = \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \ldots\ldots\infty}}}$ तब $y = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$

@apna_pdf

नोट :- $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\ldots\infty}}}$ के मान का पता लगाने के लिए, x के गुणांकों का पता लगाएं, ऐसा कि गुणांकों के बीच का अंतर 1होना चाहिए है, तो छोटा गुणांक परिणाम होगा ।

उदाहरण :- $y=\sqrt{56-\sqrt{56-\sqrt{56-\ldots\infty}}}$

हल :- हम जानते है कि,

$\Rightarrow y=\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$

$\Rightarrow y=\frac{-1+\sqrt{1+4\times 56}}{2}=\frac{-1+\sqrt{225}}{2}=\frac{-1+15}{2}=\frac{14}{2}=7$

Exam Hall Approach :-

56 को दो क्रमिक पूर्णांकों अर्थात 8 × 7 के रूप में गुणनखंड करे

$\sqrt{56-1\sqrt{56-1\sqrt{56-\ldots\ldots\ldots\infty}}}$

8 7

1

यदि श्रेणी घटाव की है तो छोटा वाला पूर्णांक उतर होगा इसलिए 7 उतर होगा ।

(3). यदि $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}\ldots\infty}}$

तब , $y=x$

(4). यदि $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}\ldots n}}$

तब , $y=x^{\frac{2^n-1}{2^n}}$

(5). $\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times\ldots\ldots\infty}}}=\sqrt[n-1]{a}$

(6). $\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div\ldots\ldots\infty}}}=\sqrt[n+1]{a}$

(7). $\sqrt{a+b\sqrt{a+b\sqrt{a+b\ldots\infty}}}=\frac{\sqrt{4a+b^2}+b}{2}$

(8). $\sqrt{a-b\sqrt{a-b\sqrt{a-b\ldots\infty}}}=\frac{\sqrt{4a+b^2}-b}{2}$

उदाहरण :- $y=\sqrt{63-2\sqrt{63-2\sqrt{63-2\ldots\infty}}}$

हल :- हम जानते है कि,

$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{4a+b^2}-b}{2}=\frac{\sqrt{4\times 63+2^2}-2}{2}=\frac{\sqrt{252+4}-2}{2}=\frac{\sqrt{256}-2}{2}=\frac{16-2}{2}=\frac{14}{2}=7$

Exam Hall Approach :-

यहाँ

$\sqrt{63-2\sqrt{63-2\sqrt{63-2\ldots\ldots\ldots\infty}}}$

9 7

2

यदि श्रेणी घटाव की है तो छोटा वाला पूर्णांक उतर होगा इसलिए 7 उतर होगा।

(9). $\sqrt{a+b\sqrt{a-b\sqrt{a+b\ldots\infty}}}=\frac{\sqrt{4a-3b^2}+b}{2}$

(10). $\sqrt{a-b\sqrt{a+b\sqrt{a-b\ldots\ldots\infty}}}=\frac{\sqrt{4a-3b^2}-b}{2}$

(11). $\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-\ldots\ldots\infty}}}}=\frac{\sqrt{4a-3}+1}{2}$

(12). $\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\ldots\ldots\infty}}}}=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$

(13). If $y=\left(\sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{a^x}\right)^z}\right)^n$ तब $y=a^{\left(\frac{x\times z\times n}{p\times q}\right)}$

(14). $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2\times\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

उदाहरण :- यदि $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$, $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ तब $(x+y)=?$

हल :- $x+y=2\times\left(\frac{7+5}{7-5}\right)=12$

(15). $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\left(\frac{4xy}{x-y}\right)$

(16). $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=4\sqrt{xy}$

(17).

उदाहरण :- यदि $m=\sqrt{13+\sqrt{13+\sqrt{13+\sqrt{13}\ldots\ldots}}}$ और $n=\sqrt{13-\sqrt{13-\sqrt{13-\sqrt{13}\ldots\ldots}}}$, $m-n=?$ का मान ज्ञात करे :

हल :-

$m=\sqrt{13+\sqrt{13+\sqrt{13+\sqrt{13}\ldots\ldots}}}$

a+1 a

$n=\sqrt{13-\sqrt{13-\sqrt{13-\sqrt{13}\ldots\ldots}}}$

a+1 a

यहां $m=a+1$ और $n=a$

$m-n=a+1-a\Rightarrow m-n=1$

(18).

उदाहरण :- $\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+\sqrt{225}}}}}=?$

हल :- $\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+15}}}}$

$=\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+13}}}$

$=\sqrt{10+\sqrt{25+11}}=\sqrt{10+6}=\sqrt{16}=4$

वर्गमूल के अंदर वर्गमूल का प्रसार

उदाहरण :- $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ को हल कीजिए ?

हल :-

$\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{1})^2-2(\sqrt{6})\times(\sqrt{1})}$

$=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{1})^2}=(\sqrt{6}-\sqrt{1})$

नोट :- $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

➢ यदि $x+y=$ स्थिरांक(नियत मान), तब

$(xy)_{max}=x$ और y का अंतर न्यूनतम होना चाहिए।

@apna_pdf

$(xy)_{min}$ = x और y का अंतर अधिकतम होना चाहिए।

उदाहरण :- इनमें से सबसे छोटा ज्ञात करे ?

$(\sqrt{8} + \sqrt{5})$, $(\sqrt{7} + \sqrt{6})$, $(\sqrt{10} + \sqrt{3})$, $(\sqrt{11} + \sqrt{2})$

हल :- यहाँ योग = 13 (स्थिरांक)

⇒ सबसे छोटा = $(\sqrt{11} + \sqrt{2})$ (अंतर अधिकतम)

सबसे बड़ा = $(\sqrt{7} + \sqrt{6})$ (अंतर न्यूनतम)

उदाहरण :- इनमें से सबसे छोटा ज्ञात करे ?

$(\sqrt{23} + 2\sqrt{3})$, $(\sqrt{31} + 2)$,$(\sqrt{24} + \sqrt{11})$, $(\sqrt{29} + \sqrt{6})$

हल :- $(\sqrt{23} + \sqrt{12})$, $(\sqrt{31} + \sqrt{4})$,$(\sqrt{24} + \sqrt{11})$, $(\sqrt{29} + \sqrt{6})$

यहाँ योग = 35 (स्थिरांक)

⇒ सबसे छोटा = $(\sqrt{31} + \sqrt{4})$ (अंतर अधिकतम)

सबसे बड़ा = $(\sqrt{23} + \sqrt{12})$ (अंतर न्यूनतम)

➢ यदि x - y = स्थिरांक(नियत मान), तब

$(xy)_{max}$ = x और y का योग न्यूनतम होना चाहिए।

$(xy)_{min}$ =x और y का योग अधिकतम होना चाहिए।

उदाहरण :- इनमें से सबसे बड़ा और सबसे छोटा ज्ञात करे ?

$(\sqrt{201} - \sqrt{199})$, $(\sqrt{101} - \sqrt{99})$, $(\sqrt{301} - \sqrt{299})$, $(\sqrt{401} - \sqrt{399})$

हल :- यहाँ योग = 2 (स्थिरांक)

अधिकतम योग = 401 + 399 = 800

सबसे छोटा = $(\sqrt{401} - \sqrt{399})$

न्यूनतम योग = 101 + 99 = 200

सबसे बड़ा = $(\sqrt{101} - \sqrt{99})$

उदाहरण:- इनमें से सबसे बड़ा और सबसे छोटा मान ज्ञात करे ?

$\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{6}$?

हल :- यहाँ घातांक 2 , 3 , 4 , 6 का L.C.M = 12

$(2^{\frac{1}{2}})^{12}$, $(3^{\frac{1}{4}})^{12}$, $(4^{\frac{1}{3}})^{12}$, $(6^{\frac{1}{6}})^{12}$

2^6 , 3^3 , 4^4 , 6^2

64 , 27 , 256 , 36

सबसे बड़ा मान = $\sqrt[3]{4}$

सबसे छोटा मान = $\sqrt[4]{3}$

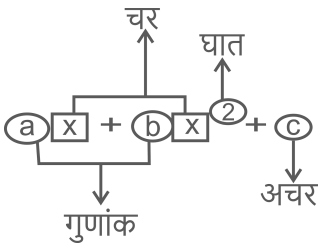
@apna_pdf

बहुपद और द्विघात समीकरण

बहुपद गणितीय अभिव्यक्तियाँ हैं जो जोड़, घटाव और गुणा जैसे अंकगणितीय संक्रियाओं का उपयोग करके चर और अचर से बनी होती हैं।

सामान्य रूप : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots + a_nx^n$
जहाँ $n \in N$
इसे $p(x), q(x), g(x), f(x)$ से दर्शाया जाता है

बहुपद से संबंधित कुछ शब्द



बहुपद की घातांक

किसी बहुपद में चर के उच्चतम या सबसे बड़े घातांक को बहुपद की डिग्री के रूप में जाना जाता है।

बहुपद के कुछ महत्वपूर्ण प्रकार

1). शून्य बहुपद :-
यह एक बहुपद है जिसकी घात शून्य के बराबर होती है।
i.e. 3 , 5, 7
इन्हें अचर बहुपद भी कहा जाता है

2). रैखिक बहुपद :-
यह घात 1 वाला एक बहुपद है **i.e.** $ax + c$

3). द्विघात बहुपद :-
यह घात 2 वाला एक बहुपद है **i.e.** $ax^2 - c$.

4). घन बहुपद :-
यह घात 3 वाला एक बहुपद है **i.e.** $ax^3 + b^2 - cx - d$.

5). द्विवर्गीय बहुपद :-
यह घात 4 वाला एक बहुपद है **i.e.** $ax^4 + bx^3 - cx + x - d$.

बहुपद के गुण

1). n-वीं डिग्री के बहुपद में 'n' सम्मिश्र/वास्तविक मूल होते हैं।

2). यदि एक बहुपद P, बहुपद Q से विभाज्य है, तो Q का प्रत्येक शून्य भी P का एक शून्य है।

3). बेज़ाउट का प्रमेय (Bezout's Theorem) :- बहुपद P(x) द्विपद x - a से विभाज्य है, यदि और केवल यदि P(a) = 0
इसे गुणनखंड प्रमेय (factor theorem) के नाम से भी जाना जाता है।

4). यदि एक बहुपद P दो सहअभाज्य बहुपद Q और R से विभाज्य है, तो यह Q × R से भी विभाज्य है।

5). शेषफल प्रमेय :- जब एक बहुपद f(x) को (x - a) से विभाजित किया जाता है तो शेषफल f(a) होता है।
i.e. $\frac{f(x)}{(x-a)} = f(a)$

6). परिमेय मूल प्रमेय :- एक बहुपद फलनात्मक $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ का परिमेय मूल p/q के रूप का होता है, जहां p, a_0 का एक गुणनखंड है और q, a_n का एक गुणनखंड है । यह प्रमेय किसी बहुपद के परिमेय शून्य ज्ञात करने में बहुत सहायक है

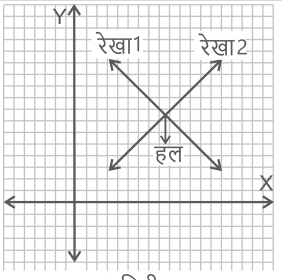
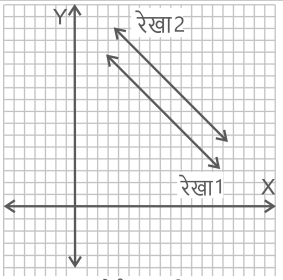
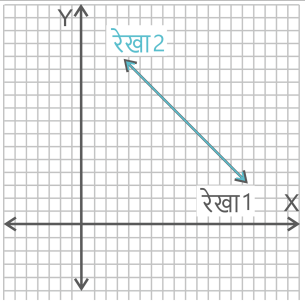
दो चर वाले रैखिक समीकरण

दो चरों में रैखिक समीकरण वे समीकरण होते हैं जिनमें दो चरों में से प्रत्येक 1 के उच्चतम क्रम (घात) का होता है और इसमें एक, कोई नहीं, या अनंत रूप से कई हल हो सकते हैं।

मानक रूप :- ax + by + c = 0 ,जहां x और y दो चर हैं।
हलो को (x, y) जैसे क्रमित युग्मों में भी लिखा जा सकता है।
i.e. 10x + 5y = 6 और 4x + 6y = 8 दो चर वाले रैखिक समीकरण हैं।

रैखिक समीकरणों की प्रणाली :- रैखिक समीकरणों की प्रणालियाँ मूल रूप से तीन प्रकार की होती हैं और तीन प्रकार के हल होते हैं।
⇒ एक स्वतंत्र प्रणाली में बिल्कुल एक युग्म (x, y) हल होता है। वह बिंदु जहां दो रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं वही एकमात्र हल है।
⇒ एक असंगत प्रणाली का कोई समाधान नहीं है. ध्यान दें कि दोनों रेखाएँ समानांतर हैं और कभी भी प्रतिच्छेद नहीं करेंगी।
⇒ एक आश्रित प्रणाली के अपरिमित रूप से अनेक समाधान होते हैं। रेखाएँ संपाती हैं। वे एक ही रेखा हैं, इसलिए रेखा पर प्रत्येक निर्देशांक युग्म एक जैसा है।

हल के प्रकार एवं उनकी शर्तें :-

हल के प्रकार	शर्तें	सचित्र प्रदर्शन
अद्वितीय हल	$\frac{a1}{a2} \neq \frac{b1}{b2}$	 अद्वितीय हल (सुसंगत और निराश्रित)
कोइ हल नहीं	$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} \neq \frac{c1}{c2}$	 कोई हल नही (असंगत और निराश्रित)
हल की अनंत संख्या	$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \frac{c1}{c2}$	 हल की अनंत संख्या (आश्रित और सुसंगत)

@apna_pin

उदाहरण :- रैखिक समीकरण की निम्नलिखित प्रणाली को हल करें
2x + 3y = 11
3x + 2y = 9

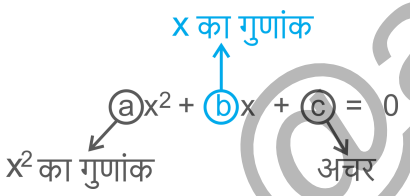
हल :- 2x + 3y = 11.....(i)
3x + 2y = 9 ..... (ii)
समीकरण (i) को 2 से और समीकरण (ii) को 3 से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है
4x + 6y = 22 ..... (a)
9x + 6y = 27 ..... (b)
समीकरण (a) को समीकरण (b) से घटाने पर हमें प्राप्त होता है
5x = 5 ⇒ x = 1
समीकरण (i) में x का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है
2 + 3y = 11 ⇒ 3y = 9 ⇒ y = 3

उदाहरण :- p के किस मान के लिए समीकरण - निकाय 18x + 36y + 45 = 0 और px - 54y + 67 = 0 का कोई हल नहीं होगा?
Higher Secondary 30/06/2023 (Shift - 2)
(a) 54 (b) – 27 (c) – 36 (d) 27
हल :- (b) दिया गया,
$18x + 36y + 45 = 0$ -------(1)
$px - 54y + 67 = 0$ -------(2)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (कोई हल नहीं)
$\frac{18}{p} = \frac{36}{(-54)} \neq \frac{45}{67}$
$p = \frac{18 \times (-54)}{36} = -27$

द्विघात समीकरण

x में दूसरी डिग्री के बीजगणितीय कथन को द्विघात समीकरण कहा जाता है।

मानक रूप :- $ax^2 + bx + c = 0$



द्विघात समीकरण का एक मूलभूत नियम यह है कि पहले स्थिरांक का मान कभी भी शून्य नहीं हो सकता।
i.e. $2x^2 + 3x + 2 = 0$

द्विघात समीकरण के मूल :-

द्विघात समीकरण के लिए: $ax^2 + bx + c = 0$, तब

- मूलो का योग (α + β) = $-\frac{b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$
- मूलो का गुणनफल (αβ) = $\frac{c}{a} = \frac{\text{अचर}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

जहां, α और β दिए गए द्विघात समीकरण के मूल हैं।

द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं।

1. मानक विधि :-

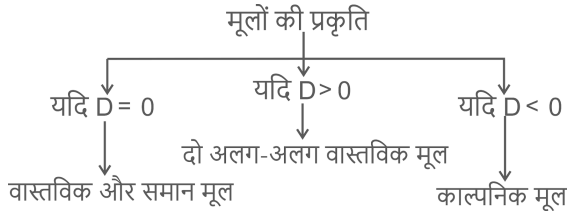
इस विधि का उपयोग करके आप किसी भी द्विघात समीकरण को हल कर सकते हैं। मान लीजिए कि समीकरण है
$ax^2 + bx + c = 0$

x का मान = $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

इसे **श्रीधराचार्य सूत्र** के नाम से जाना जाता है।

यहाँ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ = D या Discriminant (डिस्क्रिमिनेंट)

मूलों की प्रकृति :-



अगर D>0 ,दो अलग-अलग वास्तविक मूल होंगे,
अगर D<0, कोई वास्तविक मूल नहीं होंगे
अगर D=0, दो वास्तविक और समान मूल होंगे।.

उदाहरण :- दिए गए समीकरणों में मूलों की प्रकृति ज्ञात करे ।
$2x^2 - 4x - 2 = 0$.
हल :- प्रश्न के अनुसार ,
a = 2 , b = - 4 , c = -2
$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-2)$
$D = 16 + 16$
D = 32 ⇒ D > 0 इसीलिए मूल वास्तविक और अलग होंगे।

मानक विधि को लागू करने के बाद हमें दो मान एक ऋणात्मक और दूसरा धनात्मक मिलेंगे ।

उदाहरण :- $x^2 - 3x - 4 = 0$
हल :- a = 1 , b = -3 , c = -4
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$
$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2 \times 1}$
$= \frac{3+5}{2}, \frac{3-5}{2} \Rightarrow 4, -1$

2. गुणनखंड विधि :-

गुणनखंड बीजगणितीय व्यंजक को उनके गुणनखंडों के गुणनफल में तोड़ने की एक विधि है। यदि हम गुणनखंडों को पुनः गुणा करें तो उनका परिणाम मूल व्यंजक में होगा।

उदाहरण :- $x^2 + 5x + 6 = 0$
हल :- $x^2 + 3x + 2x + 6 = 0$
$(x + 3)(x + 2) = 0$
$x = -3, x = -2$

द्विघात समीकरण को हल करने की एक अन्य विधि :- यह विधि तब उपयोगी होती है जब दो द्विघात समीकरण दिए गए हों और हमें दोनों समीकरणों के मूलों की तुलना करनी हो।
1. $12x^2 - 28x + 15 = 0$
2. $4y^2 - 20y + 21 = 0$

चरण 1 :- गुणनखंड के समान मध्य पद को उनके गुणनखंडों के गुणको में विभाजित करें।
$12x^2 - 28x + 15 = 0$ के लिए
योग = - 28 और गुणनफल = 180.
इसलिए विभाजित पद - 10 और - 18 हैं

चरण 2 :- अब विभाजित संख्याओं का चिह्न बदल दें, यानी वे +10 और +18 हो जाएं।

@apna_pdf

चरण 3 :- इनमें से प्रत्येक संख्या को x^2 के गुणांक से विभाजित करने पर बनने वाली संख्या = $\frac{5}{6}, \frac{3}{2}$

y का मान ज्ञात करने और x से उनकी तुलना करने के लिए यही प्रक्रिया दोहराएँ।

यहां y का मान होगा $\frac{3}{2}, \frac{7}{2}$

यहाँ $x \leq y$.

Exam Hall Oriented Approach :-

परीक्षा में दो द्विघात समीकरण दिए जाएंगे एक x या p के रूप में और दूसरा y या q के रूप में। हमें इन चरों का मान ज्ञात करना होगा और फिर नीचे उल्लिखित निष्कर्ष पर पहुंचने के लिए इन मानों की तुलना करनी होगी।

(a) $x > y$ **(b)** $x < y$
(c) $x \geq y$ **(d)** $x \leq y$
(e) $x = y$ या संबंध स्थापित नहीं किया जा सकता।

सही विकल्प चुनने की विधि

अगर	अगर	अगर	अगर	अगर	अगर
$x_1 > y_1$ $x_1 > y_2$ $x_2 > y_1$ $x_2 > y_2$	$x_1 < y_1$ $x_1 < y_2$ $x_2 < y_1$ $x_2 < y_2$	$x_1 > y_1$ $x_1 = y_2$ $x_2 > y_1$ $x_2 > y_2$	$x_1 < y_1$ $x_1 < y_2$ $x_2 = y_1$ $x_2 < y_2$	$x_1 > y_1$ $x_1 > y_2$ $x_2 < y_1$ $x_2 > y_2$	$x_1 > y_1$ $x_1 > y_2$ $x_2 < y_1$ $x_2 < y_2$
तब $x > y$	**तब** $x < y$	**तब** $x \geq y$	**तब** $x \leq y$	**तब** सम्बन्ध स्थापित नहीं किया जा सकता	**तब** सम्बन्ध स्थापित नहीं किया जा सकता

नोट :- इसका मतलब है कि प्रतीक '>' और '<' एक साथ नहीं आ सकते। यदि वे एक साथ हैं तो संबंध स्थापित नहीं हो सकता, सही उत्तर होगा।

उदाहरण :- दिए गए प्रश्न में, I और II क्रमांकित दो समीकरण दिए गए हैं। दोनों समीकरणों को हल करें और उचित उत्तर चिह्नित करें,
I . $x^2 - 20x + 91 = 0$
II. $y^2 - 11y + 30 = 0$
SBI Clerk Pre 12/11/2022 (2nd Shift)
(a) $x > y$ (b) $x < y$ (c) $x \geq y$ (d) $x \leq y$
(e) $x = y$ या संबंध स्थापित नहीं किया जा सकता

हल :- समीकरण I से :
$x^2 - 20x + 91 = 0$
$x^2 - 13x - 7x + 91 = 0$
$x(x - 13) - 7(x - 13) = 0$
$(x - 7)(x - 13) = 0$
$x = 7, x = 13$

समीकरण II से :
$y^2 - 11y + 30 = 0$
$y^2 - 6y - 5y + 30 = 0$
$y(y - 6) - 5(y - 6) = 0$
$(y - 5)(y - 6) = 0$
$y = 5, y = 6$

x का मान	y का मान	संबंध
7	5	x > y
7	6	x > y
13	5	x > y
13	6	x > y

अतः x > y

द्विघात समीकरणों को हल करने का त्वरित तरीका :-

x/y के प्रश्न समीकरण में दिखाई देने वाला चिह्न	x या y के वास्तविक मान का चिह्न. बड़ा मान चिन्ह, छोटा मान चिन्ह
+, +	-, -
-, +	+, +
+, -	-, +
-, -	+, -

उदाहरण:- $x^2 + 7x + 12 = 0$
$y^2 - 5y + 6 = 0$

हल :- x के समीकरण के चिह्न + और + हैं, जिसका अर्थ है कि उनका हल - और - है। दोनों नकारात्मक मान.
y के समीकरण के चिह्न - और + हैं, जिसका अर्थ है कि उनके समाधान मान + और + हैं। दोनों सकारात्मक मान .जाहिर है, x के संभावित मान दोनों नकारात्मक हैं, और y के संभावित मान दोनों सकारात्मक हैं। इसलिए , समाधान $x < y$ है।

उदाहरण:- $x^2 - 12x + 32 = 0$
$y^2 - 7y + 12 = 0$

हल :- प्रश्न का प्रतीक -, + है जिसका अर्थ है कि x और y के प्रत्येक चर के लिए दोनों मान सकारात्मक होंगे।
$x^2 - 4x - 8x + 32 = 0$
$x(x - 4) - 8(x - 4) = 0$
$x = 4, x = 8$
$y^2 - 7y + 12 = 0$
$y^2 - 3y - 4y + 12 = 0$
$y(y - 3) - 4(y - 3) = 0$
$y = 3, y = 4$
अतः $x \geq y$.

द्विघात समीकरण का अधिकतम और न्यूनतम मान

द्विघात समीकरण के लिए: $P(x) = ax^2 + bx + c$

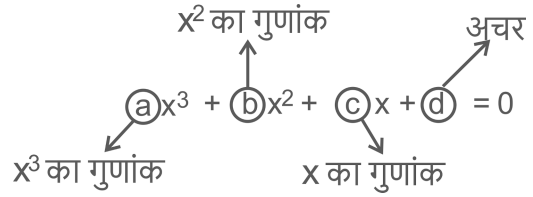
जब a > 0 तो **पर न्यूनतम मान** x = $\frac{-b}{2a}$

जब a < 0 तो पर अधिकतम मान x = $\frac{-b}{2a}$ पर

घन समीकरण

x में तीसरी डिग्री के बीजगणितीय कथन को घन समीकरण कहा जाता है।

मानक रूप :- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
यह घात 3 वाला एक बहुपद है।



@apna_pdf

घन समीकरण का एक मूलभूत नियम यह है कि पहले स्थिरांक का मान कभी भी शून्य नहीं हो सकता।

i.e. $2x^3 + 3x^2 + 1x + 2 = 0$

घन समीकरण के मूल :-

- घन समीकरण के लिए: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, फिर

इसके मूलों का योग $(\alpha + \beta + \gamma) = -\frac{b}{a} = -\frac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

मूलों के गुणनफल का योग $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

इसके मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta\gamma) = \frac{d}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

जहां, α और β दिए गए द्विघात समीकरण के मूल हैं।

कुछ महत्वपूर्ण गुण

1). 'x' के वे मान जो समीकरण p(x) = 0 को संतुष्ट करते हैं, घन बहुपद p(x) के मूल कहलाते हैं।

2). चूँकि p(x) की डिग्री 3 है, इसलिए p(x) = 0 के अधिकतम 3 मूल हो सकते हैं।

3). किसी घन समीकरण के मूलों को सिंथेटिक विभाजन, गुणनखंडन, या परिमेय मूल प्रमेय का उपयोग करके पाया जा सकता है।

दिए गए मूलों से बहुपद का निर्माण :-

1). द्विघात समीकरण :-

यदि α तथा β द्विघात समीकरण के मूल हैं तो समीकरण है

$ax^2 -$ (मूलों का योग)x + (मूलों का गुणनफल) = 0

2). घन समीकरण :-

यदि α, β तथा γ किसी घन समीकरण के मूल हैं तो समीकरण है

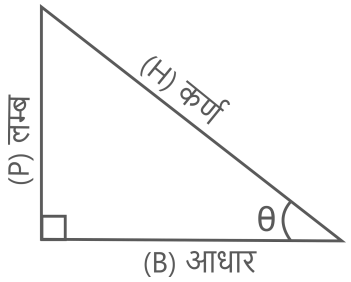
$ax^3 -$ (मूलों का योग)x^2 + (मूलो के गुणनफल का योग)x + (मूलों का गुणनफल) = 0

@apna_pdf

त्रिकोणमिति

यह गणित की वह शाखा है जो त्रिभुज की भुजाओं और कोणों की माप और कोणों से जुड़ी समस्याओं से संबंधित है।

त्रिकोणमितीय अनुपात :- किसी समकोण त्रिभुज में, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है:



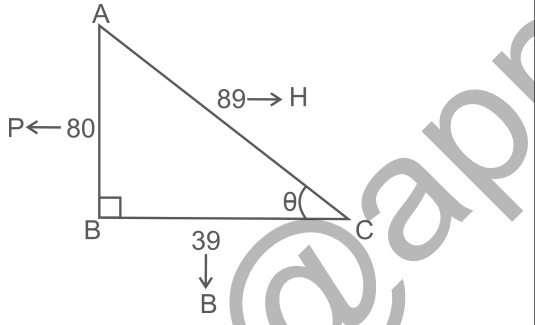
$\sin\theta = \frac{P}{H}$	$\cos\theta = \frac{B}{H}$	$\tan\theta = \frac{P}{B}$
$\operatorname{cosec}\theta = \frac{H}{P}$	$\sec\theta = \frac{H}{B}$	$\cot\theta = \frac{B}{P}$

उदाहरण :- यदि θ एक न्यूनकोण है और $\cos\theta = \frac{39}{89}$ तो $\sin\theta$ का मान क्या है?

SSC CHSL 09/08/2023 (4th Shift)

(a) $\frac{49}{89}$ (b) $\frac{79}{89}$ (c) $\frac{80}{89}$ (d) $\frac{50}{89}$

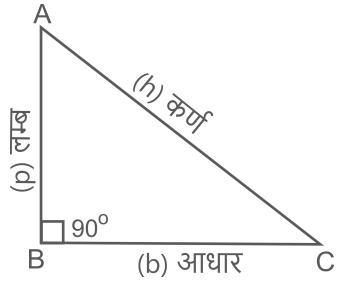
हल :-



प्रश्नों के अनुसार,

$\sin\theta = \frac{P}{H} = \frac{80}{89}$

पाइथागोरस प्रमेय :- एक समकोण त्रिभुज के लम्ब और आधार के वर्गों का योग उसके कर्ण के वर्ग के बराबर होता है।



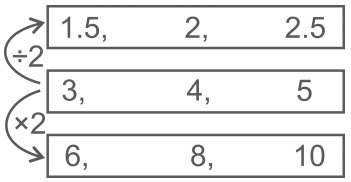
यदि आधार (b) ,लम्ब(p) और कर्ण (h) समकोण त्रिभुज की तीन भुजाएँ हों तो,

$h^2 = b^2 + p^2$

नोट :- यदि a, b, और c त्रिक (ट्रिप्लेट) के रूप में तीन संख्याएँ हैं, यदि हम एक अचर पद से गुणा या भाग करें तो ये संख्याएँ भी (ट्रिप्लेट) के रूप में होंगी।यदि a, b, और c त्रिक (ट्रिप्लेट) के रूप में तीन संख्याएँ हैं, यदि हम एक अचर पद से गुणा या भाग करें तो ये संख्याएँ भी (ट्रिप्लेट) के रूप में होंगी।

उदाहरण :- 3 , 4 , 5 (ट्रिप्लेट) हैं

अतः,



ये भी त्रिक हैं

कुछ महत्वपूर्ण त्रिक (Triplet)

1.	3 , 4, 5	**10.**	16 , 63 , 65
2.	5 , 12 , 13	**11.**	15 , 112 , 113
3.	8, 15 , 17	**12.**	13 , 84 , 85
4.	7 , 24 , 25	**13.**	28 , 45 , 53
5.	12 , 35 , 37	**14.**	33 , 56 , 65
6.	9 , 40 , 41	**15.**	69 , 260 , 269
7.	11 , 60 , 61	**16.**	60, 221, 229
8.	20, 21, 29	**17.**	105 , 208 , 233
9.	39 , 80 , 89	**18.**	120, 209 , 269

कुछ अन्य त्रिक इस प्रकार बनाये जा सकते हैं :-

माना x एक सम संख्या है तो त्रिक $(2x , x^2 - 1 , x^2 + 1)$ होगी

यदि x विषम संख्या है तो त्रिक $(x , \frac{x^2}{2} - 0.5 , \frac{x^2}{2} + 0.5)$ होगी

अवधारणा :-

यदि $a\sin\theta + b\cos\theta = c$ जहां a,b और c त्रिक हैं तो:-

$\sin\theta = \frac{a}{c}$, $\cos\theta = \frac{b}{c}$, $\tan\theta = \frac{a}{b}$

उदाहरण :- $3\sin\theta + 4\cos\theta = 5$ .....(1)

so, $\sin\theta = \frac{3}{5}$ और $\cos\theta = \frac{4}{5}$

अतः , समीकरण 1 को 5 से विभाजित करने पर

$\frac{3}{5}\sin\theta + \frac{4}{5}\cos\theta = \frac{5}{5}$ .....(1)

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

उपरोक्त अनुपात के आधार पर सर्वसमिकाएँ :-

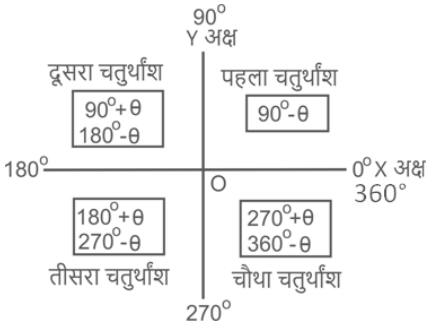
$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$	$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
$\therefore \sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$	

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
$\therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$	

$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$\therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$	

@apna_pdf

संबद्ध कोणों का त्रिकोणमितीय अनुपात



Type - I (90° - θ)

sin (90° - θ) = cosθ , cos(90° - θ) = sinθ
cot (90° - θ) = tanθ , tan(90° - θ) = cot θ
sec(90° - θ) = cosecθ , cosec (90° - θ) = secθ

उदाहरण :- $\frac{sin\ 37°}{cos\ 53°}$ का मान ज्ञात कीजिये
हल :- हम जानते हैं कि, sin (90° - θ) = cosθ
अतः , $\frac{sin\ 37°}{cos\ 53°} = \frac{sin\ 37°}{cos\ (90° - 37°)} = \frac{sin\ 37°}{sin\ 37°} = 1$

Type - II (90° + θ)

sin (90° + θ) = cosθ, cos(90° + θ) = - sinθ
cot (90° +θ) = - tanθ, tan(90° + θ) = - cot θ
sec(90° +θ) = - cosecθ, cosec (90° + θ) = secθ

उदाहरण :- sin 120° का मान ज्ञात कीजिये.

हल :- हम जानते हैं कि, sin (90° + θ) = cosθ

Sin120° = sin (90° + 30°) = cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Type - III (180° - θ)

sin (180° - θ) = sinθ, cos(180° - θ) = - cosθ
cot (180° - θ) = - cotθ, tan(180° - θ) = - tan θ
sec(180° - θ) = - secθ, cosec (180° - θ) = cosecθ

Type - IV (180° + θ)

sin (180° + θ) = -sin θ, cos(180° + θ) = - cosθ
cot (180° + θ) = cot θ, tan(180° + θ) = tanθ
sec(180° + θ) = - secθ, cosec (180° + θ) = cosecθ

Type - V (270° - θ)

sin(**270° -** θ) = - cosθ, cos(**270° -** θ)= - sinθ
cot(**270° -** θ) = tanθ, tan(**270° -** θ) = cot θ
sec(**270° -** θ) = - cosecθ, cosec (**270° -** θ) = - secθ

उदाहरण :- cot 240° का मान ज्ञात कीजिये.
हल :- हम जानते हैं कि, cot(**270° -** θ) = tanθ

cot 270° = cot (270° - 30°) = tan 30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Type - VI (270° + θ)

sin(**270° +** θ) = - cosθ, cos(**270° +** θ)= sinθ
cot(**270° +** θ) = - tanθ, tan(**270° +** θ) = - cot θ
sec(**270° +** θ) = cosecθ, cosec (**270° +** θ) = -secθ

उदाहरण :- cot 300° का मान ज्ञात कीजिये
हल :- हम जानते हैं कि, cot(**270° +** θ) = -tanθ

cot 300° = cot (270° + 30°) = - tan 30° = - $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Type - VII (n × 360° + θ)

sin (**n** × **360° +** θ) = sinθ, cos (**n** × **360° +** θ) = cosθ
cot (**n** × **360° +** θ) = cotθ, tan (**n** × **360° +** θ) = tan θ
sec (**n** × **360° +** θ) = secθ, cosec (**n** × **360° +** θ) = cosecθ

उदाहरण :- cos 1020° का मान ज्ञात कीजिये.
हल :- हम जानते हैं कि, cos (**n** × **360° +** θ) = cosθ
cos 1020° = cos (1080° - 60°)
1080 का 360° गुणक, इसलिए त्रिकोणमिति फलन में कोई परिवर्तन नहीं होगा

cos (3 × 360° - 60°) = cos 60° = $\frac{1}{2}$

उदाहरण :- निम्नलिखित को सरल करे :
7(cot 11° cot 13° cot 19° cot 29° cot 61° cot 71° cot 77° cot 79°)
SSC CHSL 09/08/2023 (3rd Shift)
(a) 7 (b) - 7 (c) - 1 (d) 1
हल :- हम जानते हैं कि, tanθ = cot (90° - θ) and $tan\ \theta \times cot\ \theta = 1$
प्रश्न के अनुसार,
7(cot 11° cot 13° cot 19° cot 29° cot 61° cot 71° cot 77° cot 79°)
= 7(cot 11° cot 13° cot 19° cot 29° cot 61° cot 71° cot 77° cot 79°)
= 7(tan 79° tan 77° tan 71° tan61° cot 61° cot 71° cot 77° cot 79°)
= 7(tan 79° cot 79° tan 77° cot 77°tan 71° cot 71° tan61° cot 61°)
= 7(1 × 1 × 1 × 1) = 7
वैकल्पिक विधि :-
If A + B = 90° , then cot A × cot B = 1
7(cot 11° cot 13° cot 19° cot 29° cot 61° cot 71° cot 77° cot 79°)
= 7(cot 11° × cot 79°)(cot 13° × cot 77°) (cot 19° × cot 71°) (cot 29° × cot 61°)
= 7(1 × 1 × 1 × 1) = 7

त्रिकोणमितीय अनुपातों का रूपांतरण :-

- sin (-x) = - sin x
- cosec (-x) = - cosec x
- cos (-x) = cos x
- sec (-x) = sec x
- tan (- x) = - tan x
- cot (- x) = - cot x

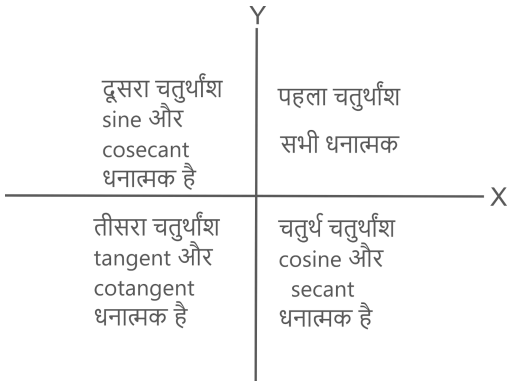
उदाहरण :- sin(- 405°) का मान ज्ञात कीजिये.
SSC CGL 20/07/2023 (3rd shift)

@apna_pdf

हल :- हम जानते हैं कि, sin (-x) = - sin x

$\sin(-405°) = -\sin(360 + 45°) = -\sin 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

विभिन्न चतुर्थांशों में त्रिकोणमितीय अनुपातों के लक्षण :-



• 90°, 270° .....(90° का विषम गुणक) त्रिकोणमिति फलन बदल जाएगा
कुछ इस प्रकार परिवर्तन होंगे
$\sin\theta \leftrightarrow \cos\theta$, $\tan\theta \leftrightarrow \cot\theta$, $\operatorname{cosec}\theta \leftrightarrow \sec\theta$
• 180°, 360° .....(90° का सम गुणक) त्रिकोणमिति फलन नहीं बदलेगा

• x axis $\pm$ $\theta \rightarrow$ कोई परिवर्तन नहीं
• y axis $\pm$ $\theta \rightarrow$ बदलता है जैसे

उदाहरण :- cosec 2910°+ sec 4260° + tan 2565° + cot 1755° = ?
SSC CGL 20/07/2023 (1st shift)
हल :- cosec 2910° = cosec(360° × 8 + 30°) {•x axis $\pm$ $\theta \rightarrow$ कोई परिवर्तन नही.}
= cosec 30° = 2
sec 4260° = sec (360° × 11 + 300°)
= sec 300° = sec(360° - 60°) = sec 60° = 2
tan 2565° = tan (360° × 7 + 45°) = tan (45°) = 1
cot 1755° = cot (360° × 4 + 315°)
= cot (315°) = cot (270° + 45°) .....{• y axis $\pm$ $\theta \rightarrow$ बदलता है जैसे ($\tan\theta \leftrightarrow \cot\theta$) {यदि θ चौथे चतुर्थांश मे है तो **tanθ ऋणात्मक** होगा }
= - tan 45° = - 1
अब, cosec 2910° + sec 4260° + tan 2565° + cot 1755°
⇒ 2 + 2 + 1 – 1 = 4

कोणों का वृत्ताकार माप

(1). sexagesimal (सेक्सजेसिमल) प्रणाली :-

1 डिग्री = $\frac{1}{90}$ समकोण

1 मिनट= $\frac{1}{60}$ डिग्री

1 सेकंड = $\frac{1}{60}$ मिनट

(2). centesimal (सेंटीसिमल) या फ्रेंच प्रणाली :-

1 समकोण = 100 ग्रेड
1 ग्रेड = 100 मिनट
1 मिनट= 100 सेकंड

(3). वृत्ताकार प्रणाली :-

1° = 60' = 60 मिनट
1' = 60" = 60 सेकंड

रेडियन और डिग्री के बीच संबंध

1 रेडियन = $\frac{180°}{\pi}$ = 57°16' लगभग.

1° = $\frac{\pi}{180}$ रेडियन = 0.01746 रेडियन लगभग

उदाहरण :- - 47°30' डिग्री को रेडियन में बदलें
हल:- - 47° 30' हम जानते हैं कि 1° = 60'

अतः, $-47°\,30' = -47\frac{1}{2}^{\circ} = \frac{-95°}{2}$

यहाँ, 180° = π रेडियन
प्रश्न के अनुसार,
$= \frac{\pi}{180°} \times (\frac{-95°}{2})$ रेडियन = $\frac{-19}{72}\pi$ रेडियन

डिग्री	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
रेडियन	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

उदाहरण :- $16\cos^3\frac{\pi}{6} - 12\cos\frac{\pi}{6}$ = _____.
SSC CGL 01/12/2022 (4th Shift)
(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) -1
हल :- $16\cos^3\frac{\pi}{6} - 12\cos\frac{\pi}{6}$

$= 16\cos^3 30° - 12\cos 30° = 16(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 - 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

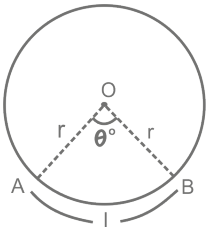
$= 16(\frac{3\sqrt{3}}{8}) - 6\sqrt{3} \Rightarrow 0$

वैकल्पिक विधि :-

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$16\cos^3\frac{\pi}{6} - 12\cos\frac{\pi}{6} = 4\cos 3 \times \frac{\pi}{6} \Rightarrow 4\cos\frac{\pi}{2} = 0$

अवधारणा(Concept) :-



यदि r वृत्त की त्रिज्या है, तो लंबाई l का एक चाप θ रेडियन का कोण अंतरित करता है

- $\overline{AB} = l = 2\Pi r \times \frac{\theta°}{360°}$
- $l = r \times \frac{\Pi\theta°}{180°}$
- $l = r \times \theta$ (यहाँ, $\theta = \theta° \times \frac{\Pi}{180°}$)

उदाहरण :- यदि 4 इकाई त्रिज्या वाले त्रिज्यखंड का कोण 45° है, तो त्रिज्यखंड की लंबाई ज्ञात कीजिए
हल :- प्रश्न के अनुसार,

$l = r \times \theta \Rightarrow l = 4 \times 45° \times \frac{\pi}{180°} \Rightarrow l = 4 \times 45° \times \frac{\pi}{180°}$

@apna_pdf

$\Rightarrow l = \frac{22}{7}$

महत्वपूर्ण सर्वसमिका
(Identities)

1). $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

$sin\theta = \sqrt{1 - cos^2\theta}$

$cos\theta = \sqrt{1 - sin^2\theta}$

2). $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

* $sec\ \theta - tan\ \theta = \frac{1}{sec\ \theta + tan\ \theta}$

$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$

$tan^2\theta = sec^2\theta - 1$

3). $cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

* $cosec\ \theta - cot\ \theta = \frac{1}{cosec\ \theta + cot\ \theta}$

$cosec^2\theta = 1 + cot^2\theta$

$cot^2\theta = cosec^2\theta - 1$

इन तीनो मूल सूत्रों से हम बाकी सारे सूत्र निकाल सकते है।

Type - 1

उदाहरण :- $(sinA + cosecA)^2 + (cosA + secA)^2$ का मान ज्ञात कीजिये।

RRC Group D 06/09/2022 (Morning)

(a) 5 + $cosec^2$ A - sec² A (b) 5 + $cosec^2$ A + sec² A

(c) 5 + sec A+ cosec A (d) 5 - $cosec^2$ A + sec² A

हल :- प्रश्न के अनुसार,

(sinA + cosecA)² + (cosA + secA)²

⇒ sin²A + cosec²A + 2 + cos²A + sec²A +2

⇒ 5 + cosec²A + sec²A

सर्वसमिका का उपयोग करने पर [sin²A + cos²A= 1]

Type - 2

उदाहरण :- sec² θ + (cosec² θ - 1) - (1 + $tan^2\theta$) - cot² θ =_____.

RRC Group D 16/09/2022 (Morning)

(a) 1 (b) 0 (c) $sec^2\theta$ (d) $cot^2\theta$

हल :- प्रश्न के अनुसार,

sec² θ + (cosec² θ - 1) - (1+ $tan^2\theta$) - cot² θ $= sec^2\theta + cot^2\theta - sec^2\theta - cot^2\theta = 0$

{सर्वसमिका का उपयोग करने पर

$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$, $cot^2\theta = cosec^2\theta - 1$ }

Type - 3

उदाहरण :- यदि cosecA - cotA = 3 तो cosecA + cotA = ?

RRB NTPC CBT - I 14/03/2021 (Morning)

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{5}$

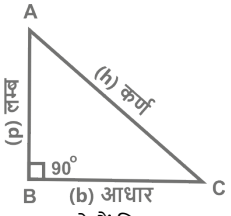
हल :- हम जानते हैं कि,

$cosec^2A - cot^2A = 1$

$\Rightarrow (cosecA - cotA)(cosecA + cotA) = 1$

$\Rightarrow cosecA - cotA = \frac{1}{3}$

सर्वसमिका के बारे में कुछ अन्य ज्ञान



हम जानते हैं कि,

$b^2 + p^2 = h^2$ ----- **(1)**

• समीकरण (1) में, दोनों पक्षों को h^2 से विभाजित करने पर हमें प्राप्त होता है,

$\frac{b^2}{h^2} + \frac{p^2}{h^2} = 1 \Rightarrow sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

• समीकरण (1) में, दोनों पक्षों को p^2 से विभाजित करने पर हमें प्राप्त होता है,

$\frac{h^2}{p^2} = \frac{b^2}{p^2} + 1 \Rightarrow \frac{h^2}{p^2} - \frac{b^2}{p^2} = 1 \Rightarrow cosec^2\theta - cot^2\theta = 1$

• समीकरण (1) में, दोनों पक्षों को b^2 से विभाजित करने पर हमें प्राप्त होता है,

$\frac{h^2}{b^2} = \frac{p^2}{b^2} + 1 \Rightarrow \frac{h^2}{b^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \Rightarrow sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

उदाहरण :- $8sin^4\beta + 9cos^4\beta = 6$ तो $cosec^6\beta + 4sec^6\beta$ का मान ज्ञात कीजिये .

हल:- हम जानते हैं कि, $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

$8sin^4\beta + 9cos^4\beta = 6$ {दोनों पक्षों को 6 से विभाजित करें}

$\frac{8}{6}sin^2\beta.sin^2\beta + \frac{9}{6}cos^2\beta.cos^2\beta = \frac{6}{6}$

1 1

$sin^2\beta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $cos^2\beta = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

प्रश्न के अनुसार,

$9cosec^6\beta + 4sec^6\beta \Rightarrow 9(\frac{4}{3})^3 + 4(\frac{3}{2})^3 = 64 \times 3 + 27 \times 2 \Rightarrow 246$

θ के विभिन्न मान के लिए त्रिकोणमितीय फलनों के मान :-

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित	0
cotθ	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित
secθ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित	-1	अपरिभाषित	1
cosecθ	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	अपरिभाषित	-1	अपरिभाषित

@apna_pdf

उदाहरण :- यदि k(tan 45° sin 60°) = cos 60° cot 30° है, तो k का मान है :
SSC CPO 04/10/2023 (1st Shift)
(a) 1 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) 2
हल :- k (tan 45° sin 60°) = cos 60° cot 30°
= k($1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$) = $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \Rightarrow k = 1$

उदाहरण :- $\frac{1+sin^2 45°}{1-cos^2 45°}$ का मान क्या है?
SSC CHSL 15/03/2023 (3rd Shift)
(a) 2 (b) 3 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$
हल :- $\frac{1+sin^2 45°}{1-cos^2 45°} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$

अवधारणा :-

यदि A और B पूरक कोण हैं (A + B) = 90° तो:-
sinA = cosB , tanA = cotB , secA = cosecB
tanA. tanB = 1 , cotA. cotB = 1
sinA .secB = 1 , cosA .cosecB = 1
$sin^2 A + cos^2 B = 1$

उदाहरण :- $tan\ 10° . tan 25°. tan\ 65°. tan\ 80°$ का मान ज्ञात कीजिये ?
हल:- हम जानते हैं कि, (A + B) = 90° तब tanA. tanB = 1
अतः , $tan\ 10° . tan 25°. tan\ 65°. tan\ 80°$

$\tan 10° . \tan 25° . \tan 65° . \tan 80°$

= 1

उदाहरण :- यदि $cot\ 2\theta . cot\ 3\theta = 1$, $sin\frac{5\theta}{2} . cos\frac{5\theta}{2}$ का मान ज्ञात कीजिये
हल:- हम जानते हैं कि ,(A + B) = 90° then cotA. cotB = 1
अतः , $cot\ 2\theta . cot\ 3\theta = 1 \Rightarrow 5\theta = 90°$
अब , $sin\frac{5\theta}{2} . cos\frac{5\theta}{2} = sin\frac{90°}{2} . cos\frac{90°}{2}$
$= sin45° cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

सभी त्रिकोणमितीय फलन की सीमा

त्रिकोणमितीय फलन	न्यूनतम	अधिकतम
sin$x$, cos$x$ (विषम घात)	-1	+ 1
sin$x$, cos$x$ (सम घात)	0	+1
tan$x$, cot$x$ (विषम घात)	-∞	+∞
tan$x$, cot$x$ (सम घात)	0	+∞
sec$x$, cosec$x$ (विषम घात)	-∞	+∞
sec$x$, cosec$x$ (सम घात)	+1	+∞

विभिन्न रूपों के त्रिकोणमितीय व्यंजकों का अधिकतम और न्यूनतम मान :-

- a sinx ± $b\ cosx \Rightarrow$ अधिकतम मान = $\sqrt{a^2+b^2}$
  न्यूनतम मान = $-\sqrt{a^2+b^2}$
- a $sin^2 x$ + b $cos^2 x$
  यदि, a > b ⇒ अधिकतम मान = a, न्यूनतम मान = b
  यदि, a < b ⇒ अधिकतम मान = b, न्यूनतम मान = a
- a $cosec^2 x$ + b $sec^2 x \Rightarrow$ अधिकतम मान= ∞,
  न्यूनतम मान = $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

- a $\sin^2 x$ + b $\text{cosec}^2 x$
- a $\tan^2 x$ + b $\cot^2 x$
- a $\cos^2 x$ + b $\sec^2 x$

अधिकतम ⟶ ∞
न्यूनतम ⟶ $2\sqrt{ab}$

- $sin^{2n} x + cos^{2m} x \Rightarrow$ अधिकतम मान = 1
  न्यूनतम मान = (x = 45° रखने पर)

उदाहरण :- $sin^2 x + cos^4 x$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए?
हल :- $sin^2 x + cos^4 x$ का अधिकतम मान = 1
$sin^2 45° + cos^4 45°$ का न्यूनतम मान = $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

- (sinx cosx)$^n \Rightarrow$ अधिकतम मान = ∞
  ⇒ न्यूनतम मान = $(\frac{1}{2})^n$

उदाहरण :- $sin^4 x\ cos^4 x$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ?
हल :- न्यूनतम मान = $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

यौगिक सूत्र या योग एवं अंतर सर्वसमिका

- $sin\ (A + B) = sin\ A.cos\ B + cos\ A.sin\ B$
- $sin\ (A - B) = sin\ A\ .cos\ B - cos\ A.sin\ B$
- $cos\ (A + B) = cosA.cosB - sinA.sinB$
- $cos\ (A - B) = cosA\ .cosB + sinA.sin\ B$
- tan(A + B) = $\frac{tanA + tanB}{1-(tanA \times tanB)}$
- tan(45° + B) = $\frac{1+tanB}{1-tanB}$
- tan(A - B) = $\frac{tanA - tanB}{1+(tanA \times tanB)}$
- tan(45° - B) = $\frac{1-tanB}{1+tanB}$
- cot (A + B)= $\frac{cotA\ cotB - 1}{cotB + cotA}$
- cot (A - B) = $\frac{cotA\ cotB + 1}{cotB - cotA}$
- tan(A+B+C) = $\frac{tanA + tanB + tanC - tanA\ tanB\ tanC}{1-(tanA\ tanB - tanBtanC - tanC\ tanA)}$

उदाहरण :- sin 15° का मान ज्ञात कीजिये .
RRB NTPC CBT - I 18/01/2021 (Morning)
(a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$
हल :- $sin\ 15°$ = sin(45° - 30°)

@apna_pdf

$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

उदाहरण :- $\frac{\sin 59°\cos 31° + \cos 59°\sin 31°}{\cos 20°\cos 25° - \sin 20°\sin 25°}$ का मान ज्ञात कीजिये

हल :- $\frac{\sin 59°\cos 31° + \cos 59°\sin 31°}{\cos 20°\cos 25° - \sin 20°\sin 25°}$

$= \frac{\sin(59° + 31°)}{\cos(20° + 25°)} \Rightarrow \frac{\sin 90°}{\cos(4\,5°)} = \sqrt{2}$

उदाहरण :- त्रिकोणमितीय सूत्रों का उपयोग करके,

$[\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}][\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}]$ का मान ज्ञात कीजिए

SSC CGL 18/07/2023 (1st shift)

(a) - 2 (b) 2 (c) 0 (d) 1

हल :- $(\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)})(\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y})$

$= (\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y})(\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y})$

$= (\frac{\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}})(\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y})$

$= (\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y})(\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}) = 1$

उदाहरण :- tan75° - cot75° का मान ज्ञात कीजिए :

RRB NTPC CBT - I 24/07/2021 (Evening)

(a) $2 - \sqrt{3}$ (b) $1 + 2\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) $2 + \sqrt{3}$

हल :- tan 75° - cot 75° = tan 75° - tan(90° - 75°)

= tan 75° - tan 15°

हम जानते हैं कि, $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + (\tan A \times \tan B)}$

tan 75°- tan 15° = $\tan(75° - 15°)\{1 + (\tan 75° \times \tan 15°)\}$

= tan 60° × 2 = $2\sqrt{3}$

कुछ महत्वपूर्ण व्युत्पन्न सर्वसमिकाएँ :

- (1 + cot A − cosec A)(1 + tan A + sec A) = 2
- (secA + tanA - 1)(secA + tanA + 1) = 2 tanA
- $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A . \sin^2 A$
- $\sin^6 A + \cos^6 A + 3\sin^2 A . \cos^2 A = 1$

उदाहरण :- (1 + cot A − cosec A)(1 + tan A + sec A) − 1 का मान होगा:

SSC CPO 09/11/2022 (Afternoon)

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 0

हल :-

(1 + cotA - cosecA) (1 + tanA + secA) - 1

A = 45°रखने पर , हमें प्राप्त होता है

(1 + cot45° - cosec45°)(1 + tan45°+ sec45°) - 1

= $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$ - 1 ⇒ 4 - 2 - 1 = 1

Exam hall approach :-

(1 + cot A − cosec A)(1 + tan A + sec A) − 1 = 2 - 1 = 1

कुछ महत्वपूर्ण द्विकोण सर्वसमिका

- sin 2A = $2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$
- cos 2A = $\cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = 2\cos^2 A - 1$

- tan 2A = $\frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$
- cot 2A = $\frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$

उदाहरण :- यदि tan A = $\frac{3}{4}$,तो sin 2A, cos 2A, और tan 2A का मान ज्ञात कीजिए .

हल :- हम जानते हैं कि, $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

$\sin 2A = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{3 \times 16}{2 \times 25} = \frac{24}{25}$

$\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{7 \times 16}{16 \times 25} = \frac{7}{25}$

$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}}$

$= \frac{3 \times 16}{2 \times 7} = \frac{24}{7}$

त्रिकोण सर्वसमिका :-

- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
- $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
- $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
- $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

उदाहरण :- $3\sin 20° - 4\sin^3 20°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :- हम जानते हैं कि, $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

अतः, $3\sin 20° - 4\sin^3 20°$

$= \sin 3 \times 20° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण :- $4\cos^3 10° - 3\cos 10°$ का मान ज्ञात कीजिए

हल :- हम जानते हैं कि, $4\cos^3 A - 3\cos A$

इसलिए , $4\cos^3 10° - 3\cos 10°$

$= \cos 3 \times 10° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

कुछ महत्वपूर्ण तथ्य :-

- $\sin\theta . \sin 2\theta . \sin 4\theta = \frac{1}{4}\sin 3\theta$
- $\sin(60° - \theta) . \sin\theta . \sin(60° + \theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$

@apna_pdf

- $sin^2(60° - \theta) + sin^2(\theta) + sin^2(60° + \theta) = \frac{3}{2}$
- $cos\ \theta\ .cos\ 2\theta\ .cos\ 4\theta = \frac{1}{4} cos\ 3\theta$
- $cos\ (60° - \theta)\ .cos\ \theta\ .cos\ (60° + \theta) = \frac{1}{4} cos\ 3\theta$
- $cos^2(60° - \theta) + cos^2(\theta) + cos^2(60° + \theta) = \frac{3}{2}$
- $tan\theta.tan2\theta.tan4\theta = tan3\theta$
- $tan(60° - \theta).tan\theta.tan(60° + \theta) = tan3\theta$

उदाहरण :- $sin20°\ .sin40°.sin80°$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :- हम जानते हैं कि, $sin\ \theta\ .sin\ 2\theta\ .sin\ 4\theta = \frac{1}{4} sin\ 3\theta$

$sin20°\ .sin40°.sin80° = \frac{1}{4} sin\ 60° = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

उदाहरण :- $tan\ 10°\ .tan50°.tan60°.tan70°$ का मान ज्ञात कीजिए

हल :- हम जानते हैं कि

$tan(60° - \theta).tan\theta.tan(60° + \theta) = tan3\theta$

अतः, $tan\ 10°\ .tan50°.tan60°.tan70°$

$tan30°.sin\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = 1$

जोड़ या अंतर का गुणनफल में रूपांतरण :-

- sin C + sin D = 2 sin $\frac{C+D}{2}$ cos $\frac{C-D}{2}$
- sin C - sin D = 2 cos $\frac{C+D}{2}$ sin $\frac{C-D}{2}$
- cos C + cos D = 2 cos $\frac{C+D}{2}$ cos $\frac{C-D}{2}$
- cos C - cos D = - 2 sin $\frac{C+D}{2}$ sin $\frac{C-D}{2}$

उदाहरण :- sinα - sinβ का मान ज्ञात कीजिए

SSC CGL 01/12/2022 (2nd Shift)

(a) 2cos $\frac{\alpha+\beta}{2}$ sin $\frac{\alpha-\beta}{2}$ (b) 2sin $\frac{\alpha+\beta}{2}$ sin $\frac{\alpha-\beta}{2}$

(c) 2cos $\frac{\alpha-\beta}{2}$ sin $\frac{\alpha+\beta}{2}$ (d) 2cos $\frac{\alpha+\beta}{2}$ cos $\frac{\alpha-\beta}{2}$

हल :- सूत्र :-

sin C - sin D = 2 cos $\frac{C+D}{2}$ sin $\frac{C-D}{2}$

sinα - sinβ = 2cos $\frac{\alpha+\beta}{2}$ sin $\frac{\alpha-\beta}{2}$

उदाहरण :- cos6θ - cos8θ का मान ज्ञात कीजिए.

हल:- सूत्र :-

cos C - cos D = - 2 sin $\frac{C+D}{2}$ sin $\frac{C-D}{2}$

cos6θ - cos8θ = - 2 sin $\frac{6\theta+8\theta}{2}$ sin $\frac{6\theta-8\theta}{2}$ = $2sin7\theta sin\theta$

महत्वपूर्ण अवधारणाएं :-

- a sin$x$ + b cos$x$ = m, a cos$x$ - b sin$x$ = n

तब, $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$

उदाहरण :- यदि 3 sinθ + 5 $cos\theta$ = 5 तो 3 cosθ - 5sinθ का मान ज्ञात कीजिए ?

हल :- 3 sinθ + 5 $cos\theta$ = 5. और 3 cosθ - 5 sinθ = n

तब $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ का प्रयोग करने पर $= 3^2 + 5^2 = 5^2 + n^2$

- a sec$x$ + b tan$x$ = m

a tan$x$ - b sec$x$ = n

तब, $a^2 - b^2 = m^2 - n^2$

- यदि secx और tanx को क्रमशः cosecx और cotx द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है। फिर भी परिणाम समान होगा।

उदाहरण :- यदि 29 secθ − 21 $tan\theta$ = 20 तो 29 tanθ − 21 $sec\theta$ का मान ज्ञात कीजिए?

हल :- 29 $tan\theta$ − 21 $sec\theta$ $= \sqrt{20^2 - 29^2 + 21^2}$ = 0

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :-

(i). यदि , A + B + C = 180°. तब,

- tanA + tanB + tanC = tanA tanB tan C
- cotA cotB + cotB cotC + cotC cotA = 1
- tan $\frac{A}{2}$ tan $\frac{B}{2}$ + tan $\frac{B}{2}$ tan $\frac{C}{2}$ + tan $\frac{C}{2}$ tan $\frac{A}{2}$ = 1
- sinA + sinB + sinC = 4cos $\frac{A}{2}$ cos $\frac{B}{2}$ cos $\frac{C}{2}$
- sin2A + sin2B + sin2C = 4sinAsinBsinC

उदाहरण :- tan 34° tan76° tan 70° का मान ज्ञात कीजिए।

हल :- यदि , A + B + C = 180°. तब,

tanA + tanB + tanC = tanA tanB tan C

प्रश्न के अनुसार, 34° + 76° + 70° = 180°

tan 34° + tan76° + tan 70°= tan 34° tan 76° tan 70°

(ii). यदि , A + B + C = 90°. तब,

- tanA tanB + tanB tanC + tanC tanA = 1
- cotA + cotB + cotC = cotA cotB cotC

(iii). यदि , A + B = 45° या 225°. तब

- (1 + tanA) (1 + tanB) = 2
- (1 - cotA) (1 - cotB) = 2

उदाहरण :- $(1 + tan\ 5°)(1 + tan\ 40°)$का मान ज्ञात कीजिए ?

हल :- प्रश्न के अनुसार, यदि , A + B = 45°. तब

(1 + tanA) (1 + tanB) = 2

अतः , $(1 + tan\ 5°)(1 + tan\ 40°)$ = 2

उदाहरण :- यदि A + B = 45° तो $\frac{tanA}{1-tanA} \cdot \frac{tanB}{1-tanB}$ का मान ज्ञात कीजिए ?

हल :- प्रश्न के अनुसार,

$$\frac{tanA}{1-tanA} \cdot \frac{tanB}{1-tanB} = \frac{\frac{1}{cotA}}{1-\frac{1}{cotA}} \cdot \frac{\frac{1}{cotB}}{1-\frac{1}{cotB}}$$

$$= \frac{1}{cotA - 1} \cdot \frac{1}{cotB - 1}$$

यदि A + B = 45°. तब (1 - cotA) (1 - cotB) = 2

अतः , $= \frac{1}{cotA-1} \cdot \frac{1}{cotB-1} = \frac{1}{2}$

गुणनफल का जोड़ या अंतर में रूपांतरण :-

- 2cosC.cosD = cos(C + D) + cos(C - D)

@apna_pdf

- -2sinC.sinD = cos(C + D) - cos(C - D)
- 2sinC.cosD = sin(C + D) + sin(C - D)
- 2cosC.sinD = sin(C + D) - sin(C - D)
- $sec\theta - tan\theta = \frac{1}{sec\theta + tan\theta}$

  $sec\theta - tan\theta = p$

  तब,

  $\sec\theta = \frac{p^2+1}{2p}$, $\tan\theta = \frac{1-p^2}{2p}$

  $\sin\theta = \frac{1-p^2}{p^2+1}$

उदाहरण :- यदि $sec\theta - tan\theta = m$, तो $2tan\theta$ का मान ज्ञात कीजिए?

SSC CHSL 02/08/2023 (3rd Shift)

(a) $\frac{1-m}{m}$ (b) $\frac{1-m^2}{m}$ (c) $\frac{1+m^2}{m}$ (d) $\frac{m^2-1}{m}$

हल :- प्रश्न के अनुसार, $\tan\theta = \frac{1-p^2}{2p} = \frac{1-m^2}{2m}$

अतः, $2\tan\theta = \frac{1-m^2}{2m} \times 2 = \frac{1-m^2}{m}$

- $cosec\theta - cot\theta = \frac{1}{cosec\theta + cot\theta}$

  $cosec\theta - cot\theta = p$

  तब;

  $\text{cosec}\,\theta = \frac{p^2+1}{2p}$, $\cot\theta = \frac{1-p^2}{2p}$

  $\cos\theta = \frac{1-p^2}{p^2+1}$

उदाहरण :- यदि $\frac{1}{cosec\theta - cot\theta} - \frac{1}{sin\theta} = x$, तब $\frac{1}{cosec\theta + cot\theta} - \frac{1}{sin\theta}$, जहाँ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए ?

UPSC CDS - II (04/09/2022)

(a) - x (b) x (c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

हल :- हम जानते हैं कि, $cosec\theta - cot\theta = \frac{1}{cosec\theta + cot\theta}$

प्रश्न के अनुसार, यदि $\frac{1}{cosec\theta - cot\theta} - \frac{1}{sin\theta} = x$

$\Rightarrow cosec\theta + cot\theta - cosec\theta = x \Rightarrow cot\theta = x$

अतः, $\frac{1}{cosec\theta + cot\theta} - \frac{1}{sin\theta}$

$\Rightarrow cosec\theta - cot\theta - cosec\theta = -cot\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{cosec\theta + cot\theta} - \frac{1}{sin\theta} = -x$

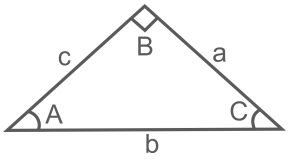
कुछ विशेष त्रिकोणमिति कोण का मान :-

क्रम संख्या	कोण
1.	$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75°$
2.	$\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75°$
3.	$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72°$
4.	$\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72°$
5.	$\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54°$
6.	$\sin 54° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36°$
7.	$\sin 22\frac{1}{2}° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
8.	$\cos 22\frac{1}{2}° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

उदाहरण :- sin 75° का मान ज्ञात कीजिये.

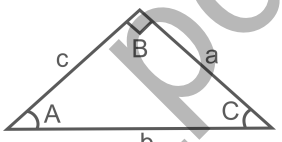
हल :- $\sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ज्या का नियम (Sine rule) :-



$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$$

को- ज्या का नियम (Cosine rule) :-



$\text{CosA} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\text{CosB} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\text{CosC} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

अर्धकोण सूत्र :-

$sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-cosA}{2}$

- $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$
- $cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+cosA}{2}$
- $\cos A = cos^2\frac{A}{2} - sin^2\frac{A}{2} = 1 - 2sin^2\frac{A}{2}$

  $= \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}} = 2cos^2\frac{A}{2} - 1$
- $tan^2\frac{A}{2} = \frac{1-cosA}{1+cosA}$
- $\tan A = \frac{2tan\frac{A}{2}}{1-tan^2\frac{A}{2}}$
- $cot^2\frac{A}{2} = \frac{1+cosA}{1-cosA}$
- $\cot A = \frac{cot^2\frac{A}{2}-1}{2cot\frac{A}{2}}$

उदाहरण :- $\frac{1-tan^2 22\frac{1}{2}°}{1+tan^2 22\frac{1}{2}°}$ का मान ज्ञात कीजिये.

@apna_pdf

हल :- हम जानते हैं कि , $\cos A = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$

$\frac{1-\tan^2 22\frac{1}{2}^\circ}{1+\tan^2 22\frac{1}{2}^\circ} = \frac{1-\tan^2\frac{45}{2}^\circ}{1+\tan^2\frac{45}{2}^\circ} = \cos 45^\circ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

उदाहरण :- $\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{4}}$ का मान ज्ञात कीजिये.

हल :- $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

प्रश्न के अनुसार,

$$\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{4}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{4}} = \frac{4\sin\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{4}}$$

$$= 4\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$$

त्रिकोणमितीय फलन का सामान्य हल :-

$\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\tan x = 0 \Rightarrow x = n\pi$

$\sin x = \sin y \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n y$

$\cos x = \cos y \Rightarrow x = 2n\pi \pm y$

कुछ उपयोगी तथ्य :-

$(\frac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta})^2 = \tan^2\theta$

$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

$\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$(\tan\theta - \cot\theta)(\tan^2\theta + \cot^2\theta + 1) = \tan^3\theta - \cot^3\theta$

कुछ अन्य अवधारणा :-

1). यदि , A + B = 180°

tanA + tanB = 0

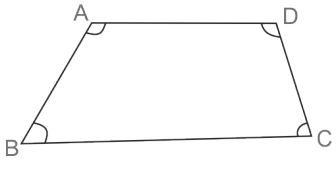
cosA + cosB = 0

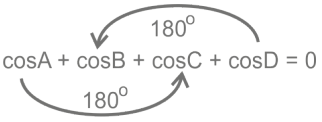
secA + cosB = 0

cotA + cotB = 0

उदाहरण :- यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, cosA + cosB + cosC + cosD का मान ज्ञात कीजिये

हल :-





2). यदि $\cot\theta + \tan\theta = x$ and $\sec\theta - \cos\theta = y$ तब

$(x^2y)^{\frac{2}{3}} - (xy^2)^{\frac{2}{3}} = 1$

3). यदि $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ तब $\sin\theta = \cos^2\theta$ और $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$ और $\cos^{12}\theta + 3\cos^{10}\theta + 3\cos^8\theta + \cos^6\theta + 2\cos^4\theta + 2\cos^2\theta - 2 = 1$

4). यदि $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ और $\frac{x}{a}\sin\theta - \frac{y}{b}\cos\theta = 1$ तब

$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 2$

5). (i) (a) sin1°. sin2° .sin3°.....sin180° = 0

(b) sin1°. sin2°. sin3°..... sin180° से भी अधिक = 0

(ii) (a) cos1°. cos2° .cos3°.....cos90° = 0

(b) cos1°. cos2° .cos3°..... cos90° से भी अधिक = 0

(iii) tan1°. tan2° .tan3°.....tan89° = 1

(iv) $\sin^2\theta + \sin^2(x+\theta) + ...+ \sin^2[90 - (x+\theta)] + \sin^2(90-\theta) = \frac{Total\ terms}{2}$

उदाहरण :- $\sin^2 5^\circ + \sin^2 6^\circ + ...+\sin^2 84^\circ + \sin^2 85^\circ$ का मान ज्ञात कीजिये .

हल :- हम जानते हैं, $\sin^2\theta + \sin^2(x+\theta) + ... + \sin^2[90-(x+\theta)] + \sin^2(90-\theta) = \frac{\text{कुल पद}}{2}$

प्रश्न के अनुसार,

पदो की कुल संख्या $= t_n = a + (n-1)d$

a = 5 , d = 1

$85 = 5 + (n-1)1 \Rightarrow n = 81$

अतः , $\sin^2 5^\circ + \sin^2 6^\circ + ...+\sin^2 84^\circ + \sin^2 85^\circ$

$= \frac{\text{कुल पद}}{2} = \frac{81}{2} = 40\frac{1}{2}$

कुछ अन्य त्रिकोणमितीय फलन को हल करने के लिए योगांतरानुपात का उपयोग :-

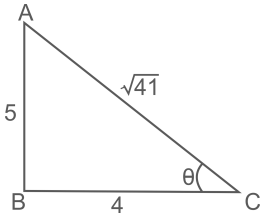
यदि $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, तब $\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b}{a-b}$

उदाहरण :- यदि $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 9$, $\tan\theta$ और $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिये ?

हल :- C & D का प्रयोग करने पर $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 9$

$\frac{(\sin\theta + \cos\theta) + (\sin\theta - \cos\theta)}{(\sin\theta + \cos\theta) - (\sin\theta - \cos\theta)} = \frac{9+1}{9-1}$

$\frac{2\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{10}{8} \Rightarrow \tan\theta = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \frac{5}{4}$



@apna_pdf

$cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$

उदाहरण :- यदि 2 cotθ = 3 , $\frac{2cos\theta - sin\theta}{2cos\theta + sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल :- 2 cotθ = 3 ⇒ cotθ = $\frac{3}{2}$

$\frac{cos\theta}{sin\theta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2cos\theta}{sin\theta} = \frac{3}{1}$ { ∵ दोनों ओर 2 से गुणा करें}

C & D का प्रयोग करने पर

$\frac{2cos\theta + sin\theta}{2cos\theta - sin\theta} = \frac{3+1}{3-1} \Rightarrow \frac{2cos\theta + sin\theta}{2cos\theta - sin\theta} = \frac{4}{2}$

$\frac{2cos\theta - sin\theta}{2cos\theta + sin\theta} = \frac{1}{2}$

त्रिकोणमिति में मान रखने की विधि

Type - I

नोट :-

चरण 1 :- कुछ त्रिकोणमितीय मामलों के प्रश्नों को हल करने के लिए पहले हम दिए गए समीकरण से कोण के मान की गणना करते हैं

चरण 2 :- अन्य समीकरणों में कोण का मान डालें

उदाहरण :- यदि $sin\alpha\ sin\beta$ - $cos\alpha\ cos\beta$ + 1 = 0 , तब 1 + $cot\alpha\ tan\beta$ का मान ज्ञात कीजिये.

हल :- प्रश्न के अनुसार,

$sin\alpha\ sin\beta$ - $cos\alpha\ cos\beta$ + 1 = 0

$cos\alpha\ cos\beta$ - $sin\alpha\ sin\beta$ = 1

हम जानते हैं, $cos\ (A + B) = cosA.cosB - sinA.sinB$

$cos\alpha\ cos\beta$ - $sin\alpha\ sin\beta$ = 1

$cos(\alpha + \beta)$ = cos 0° ⇒ $(\alpha + \beta)$ = 0° ⇒β = - α

इसलिए, 1 + $cot\alpha\ tan\beta$ = 1 + $cot\alpha\ tan(-\alpha)$ = 0

Type - II

नोट :- जब, त्रिकोणमितीय फलन दिया गया हो:-

$(sec\theta - cosec\theta = 0)$,

$(sin\theta - cos\theta = 0)$,

$(tan\theta - cot\theta = 0)$

फिर प्रश्न को हल करने के लिए θ = 45° रखे ।

उदाहरण :- यदि $sec\theta - cosec\theta$ = 0 और θ एक न्यूनकोण है, तो $sec^2\theta + cosec^2\theta$ का मान क्या है??

हल :- प्रश्न के अनुसार,

$sec\theta - cosec\theta$ = 0 {θ = 45° रखे}

$sec\ 45° - cosec\ 45° \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2}$ = 0

0 = 0 {इसलिए L.H.S = R.H.S संतुष्ट}

इसलिए, $sec^2\theta + cosec^2\theta \Rightarrow sec^2 45° + cosec^2 45°$

$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$ = 4

Type - III

नोट :- जब, त्रिकोणमितीय फलन में दिया गया हो:

$(sec\theta + \frac{1}{cos\theta} = 2)$,

$(sec\theta + cos\theta = 2)$,

फिर प्रश्न को हल करने के लिए θ = 0° रखने पर

उदाहरण :- यदि sec θ + $\frac{1}{cos\ \theta}$ = 2, तब $sec^{55}\theta + \frac{1}{sec^{55}\theta}$ मान ज्ञात कीजिए ?

हल :- $sec\theta + \frac{1}{cos\theta} = 2$

$sec\theta + sec\theta = 2$

$2sec\theta = 2 \Rightarrow sec\theta = 1 = sec0° \Rightarrow \theta = 0°$

इसलिए , $sec^{55}\theta + \frac{1}{sec^{55}\theta} = sec^{55}0° + \frac{1}{sec^{55}0°} = 1 + 1 = 2$

Exam hall approach :-

इस प्रकार के प्रश्न में θ = 0° रख सकते हैं

sec θ + $\frac{1}{cos\ \theta}$ = 2 ⇒ sec 0° + $\frac{1}{cos\ 0°}$ = 2 ⇒ 2

$sec^{55}0° + \frac{1}{sec^{55}0°} = 2$

Type - IV

उदाहरण :- यदि $tan^2\theta$ + 3 secθ - 9 = 0, जहां 0 < θ <90°, तो °, $12cot^2\theta$ + 3 cosecθ का मान क्या है?

UPSC CDS - I (10/04/2022)

(a) $(\sqrt{3} + 1)^2$ (b) $(\sqrt{3} + 2)^2$ (c) $(2\sqrt{3} + 1)^2$ (d) $(3\sqrt{3} + 1)^2$

हल :- प्रश्न के अनुसार,

θ = 60° रखे

$tan^2 60°$ + 3 sec60° - 9 = 0

$(\sqrt{3})^2 + 3 \times 2 - 9 = 0 \Rightarrow 9 - 9 = 0$

अब , $12cot^2\theta$ + 3 cosecθ

$12cot^2 60° + 3\ cosec60°$

$12 \times (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

$4 + 2\sqrt{3} = (3 + 1 + 2 \times 1 \times \sqrt{3}) = (\sqrt{3} + 1)^2$

Type - V

नोट :- कुछ विशेष शर्तों में प्रश्नों को हल करने के लिए हम प्रश्न और विकल्प दोनों में θ = 30°,60° का मान रख सकते हैं।.

उदाहरण :- $tan\frac{\theta}{2}$ का मान क्या है ?

SSC CGL 26/07/2023 (4th shift)

(a) $\frac{Cos\theta}{1 - Sin\theta}$ (b) $\frac{Sin\theta}{1 - Cos\theta}$ (c) $\frac{Cos\theta}{1 - Cos\theta}$ (d) $\frac{Sin\theta}{1 + Cos\theta}$

हल :- θ = 60° रखे

$tan\frac{\theta}{2} = tan\frac{60°}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

समीकरण को संतुष्ट करने के लिए विकल्पों में एक-एक करके θ = 60° का मान रखने पर, विकल्प (d) संतुष्ट करता हैं।.

$\frac{Sin\theta}{1 + Cos\theta} \Rightarrow \frac{Sin60°}{1 + Cos60°} \Rightarrow \frac{\sqrt{3} \times 2}{2 \times 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

वैकल्पिक विधि :-

sin 2θ = 2 sinθ cosθ

$cos\ 2\theta = 2cos^2\theta - 1$

$\frac{Sin\ \theta}{1 + cos\theta} = \frac{2\ sin\frac{\theta}{2}\ cos\frac{\theta}{2}}{2\ cos^2\frac{\theta}{2}} = tan(\frac{\theta}{2}) \Rightarrow tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{Sin\ \theta}{1 + cos\theta}$

@apna_pdf

Type - VI

नोट :-

(i) कुछ विशिष्ट शर्तो में प्रश्नों को हल करने के लिए हमें प्रश्नों में θ = 30°,60°...आदि का मान रखने की आवश्यकता नहीं होती है।

(ii) यदि चर दिए गए हैं तो किसी भी चर का मान 0 रखे

उदाहरण :- यदि $asin^2\theta + bcos^2\theta = c$ तो tanθ का मान ज्ञात कीजिये ?

(a) $\sqrt{\frac{c-b}{a-c}}$ (b) $\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}$ (c) $\sqrt{\frac{c-b}{c-a}}$ (d) $\sqrt{\frac{c+b}{a+c}}$

हल :- $asin^2\theta + bcos^2\theta = c$ {c= 0 रखे }

$asin^2\theta = -bcos^2\theta \Rightarrow \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{-b}{a} \Rightarrow tan^2\theta = \frac{-b}{a}$

मान को संतुष्ट करने के लिए विकल्पों में एक-एक करके c = 0 रखे , फिर विकल्प a संतुष्ट करता है ।

$\sqrt{\frac{c-b}{a-c}} = \sqrt{\frac{0-b}{a-0}} = \frac{-b}{a}$

Type - VII

नोट :-

(i) सामान्य त्रिकोणमितीय फलन में प्रश्नों को हल करने के लिए हम cosine , sine , sec and cosec फलन में θ = 30°, 60° , 90° मान रख सकते हैं

(ii) tan और cot फलन में θ = 45° का मान रखें

उदाहरण :- $\sqrt{\frac{1+cos2A}{1-cos2A}}$ का मान है? (नोट: A गैर-शून्य है)

RRB NTPC CBT - I 16/01/2021 (Evening)

(a) tanA (b) sinA (c) cosA (d) cotA

हल :- $\sqrt{\frac{1+cos\,2A}{1-cos2A}}$

A = 30° रखे

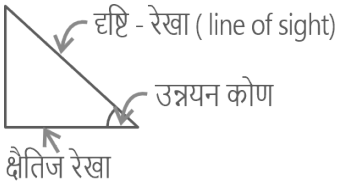
$\sqrt{\frac{1+cos60}{1-cos60}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}$ = cot 30° = cotA

@apna_pdf

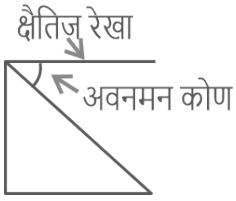
ऊँचाई और दूरी

इस अध्याय में निम्नलिखित अवधारणाओं/शब्दावली का प्रयोग किया जाएगा।

उन्नयन कोण (Angle Of Elevation) :- जब किसी वस्तु को धरातल से ऊपर की ओर देखा जाता है तो धरातल के साथ बने कोण को उन्नयन कोण कहते है।



अवनमन कोण (Angle Of Depression) :- जब किसी वस्तु का निचे की ओर झुकते हुए कोण बन रहा है तो उसे अवनमन कोण कहते है।



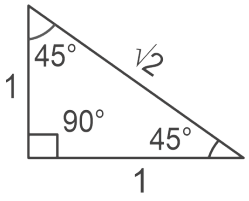
नोट:- जब हम वस्तु के पास आते हैं तो उन्नयन कोण बढ़ता है और जब हम वस्तु से दूर जाते हैं तो उन्नयन कोण कम हो जाता है।

नोट:- उन्नयन कोण और अवनमन कोण हमेशा बराबर होते हैं।

कुछ महत्वपूर्ण संबंध

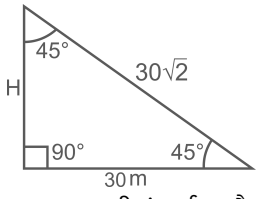
S.No.	कोण	भुजाओ का अनुपात
1.	45° : 45° : 90°	$1 : 1 : \sqrt{2}$
2.	30° : 60° : 90°	$1 : \sqrt{3} : 2$
3.	15° : 75° : 90°	$(\sqrt{3}-1) : (\sqrt{3}+1) : 2\sqrt{2}$
4.	30° : 30° : 120°	$1 : 1 : \sqrt{3}$

स्थिति (1)



उदाहरण:- जमीन पर एक बिंदु से एक टावर के शीर्ष का उन्नयन कोण, 45° जो टावर के आधार से 30 मीटर दूर है। टावर की ऊंचाई ज्ञात करे ?

हल:-



माना टावर की ऊंचाई 'H' है

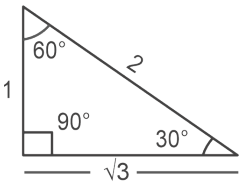
$\tan 45° = \frac{H}{30}$

$1 = \frac{H}{30} \Rightarrow H = 30$ m

Exam hall approach:- 1 इकाई = 30 m

1 इकाई = ? ⇒ ? = 30 m

स्थिति (2)

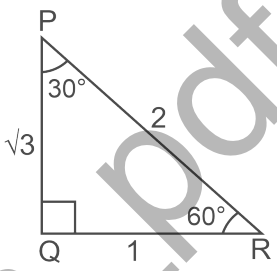


उदाहरण:- एक क्षैतिज तल पर एक इमारत के आधार से 70 m की दूरी पर उसके शीर्ष का उन्नयन कोण 60° पाया जाता है। इमारत की ऊंचाई ज्ञात कीजिए ।

SSC CGL Tier II (03/03/2023)

(a) $70\sqrt{3}$ m (b) $60\sqrt{3}$ m (c) $50\sqrt{3}$ m (d) $70\sqrt{2}$ m

हल:-



कोण → 30° : 60° : 90°

भुजा → 1 : $\sqrt{3}$: 2

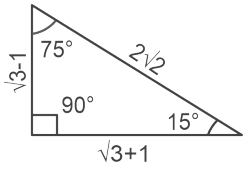
प्रश्नों के अनुसार , 1 इकाई = 70 m

तब, भवन की ऊँचाई ($\sqrt{3}$ इकाई) = $70\sqrt{3}$ m.

Exam hall approach:- 1 इकाई = 70 मीटर

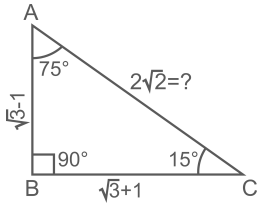
$\sqrt{3}$ इकाई = ? ⇒ ? = मीटर = $70\sqrt{3}$ मीटर

स्थिति (3)



उदाहरण:- एक दीवार के साथ झुकी हुई सीढ़ी का उन्नयन कोण 15° है और सीढ़ी का निचला भाग दीवार से 4 m दूर है तो सीढ़ी की लंबाई ज्ञात करे ?

हल:-



माना AB = दीवार और AC = सीढ़ी,

∠ACB = 15° और BC = 4 m

अब

$\sqrt{3} + 1$ इकाई = 4 m

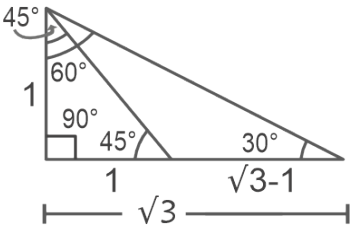
2√2 इकाई =? ⇒ ? = $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

@apna_pdf

जब कोण बदलता है

स्थिति (1)

जब कोण 30° से 45° में परिवर्तित हो जाता है

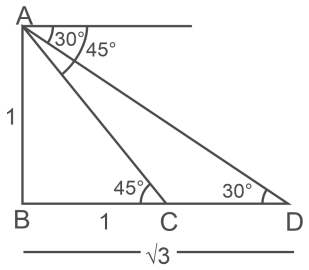


उदाहरण :- समुद्र तल से 42 मीटर ऊंचे एक प्रकाशस्तंभ के शीर्ष से अवलोकन करने पर, इसकी ओर सीधे आ रहे जहाज का अवनमन कोण 30° से 45° हो जाता है। अवलोकन की अवधि के दौरान जहाज द्वारा तय की गई दूरी क्या है?

SSC CHSL 04/08/2021 (Evening)

(a) $42(1-\sqrt{3})$ (b) $42(\sqrt{3}+1)$ (c) $42(\sqrt{3}-1)$ (d) 42

हल :-



दी गई आकृति से, हमारे पास;

CD = BD - BC = $(\sqrt{3}-1)$ इकाई

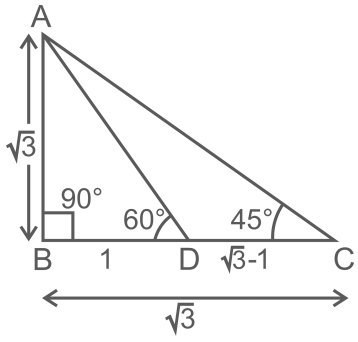
यहां 1 इकाई---------- 42 मी

तब, $(\sqrt{3}-1)$ इकाई ---------- $42(\sqrt{3}-1)$ मी

अत: प्रेक्षण अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी = $42(\sqrt{3}-1)$ मी

स्थिति (2)

जब कोण 45° से 60° में परिवर्तित हो जाता है



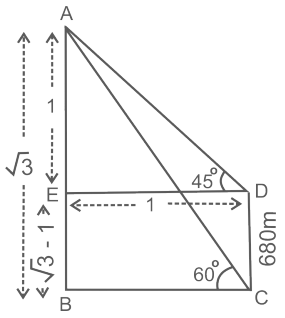
उदाहरण :- 680 मीटर ऊँची एक इमारत के शीर्ष से एक टावर के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है तथा उसी इमारत के आधार से उस टावर के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° है। टावर की ऊँचाई (मीटर में) क्या है?

SSC CGL Tier II (07/03/2023)

(a) 340(3 + √3) (b) 310(3 - √3)

(c) 310(3 + √3) (d) 340(3 - √3)

हल :-



माना AB = टावर की ऊंचाई = $\sqrt{3}$ इकाई

भवन की ऊँचाई = BE = CD= 680 मी.

प्रश्न के अनुसार,

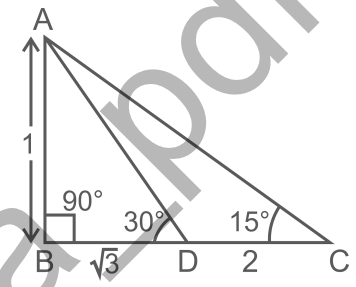
⇒ $(\sqrt{3}-1)$ इकाई = 680

⇒ $\sqrt{3}$ इकाई = $\frac{680}{\sqrt{3}-1} \times \sqrt{3}$

= $\frac{680\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$ = $340(3+\sqrt{3})$ मी.

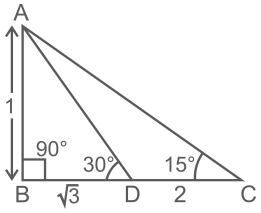
स्थिति (3)

जब कोण 15° से 30° में परिवर्तित हो जाता है



उदाहरण :- एक कार एक टॉवर की ओर एकसमान गति से बढ़ रही है। टावर के शीर्ष से कार तक अवनमन कोण को 15° से 30° तक बदलने में 15 मिनट का समय लगता है। अब कार टावर के आधार पर कितने समय बाद पहुंचेगी ?

हल :-

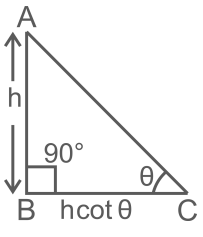


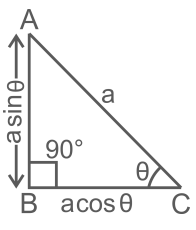
प्रश्न के अनुसार,

⇒ 2 इकाई = 15 मिनट

⇒ $(\sqrt{3})$ इकाई = $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ मिनट

स्थिति (4)

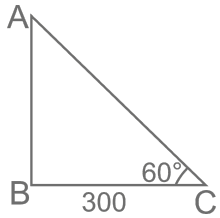




उदाहरण :- समतल भूमि पर एक चट्टान के पाद से 300 मी, एक चट्टान की

@apna_pdf

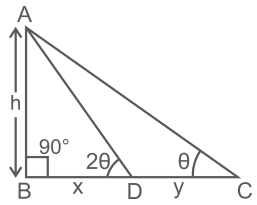
चोटी का उन्नयन कोण 60° है। चट्टान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
RRB NTPC CBT - I 03/04/2021 (Evening)
(a) $200\sqrt{3}$m (b) $150\sqrt{3}$m (c) $300\sqrt{3}$m (d) $250\sqrt{3}$m
हल :-



त्रिभुज ABC में
BC = 300 m
$\tan\theta = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \tan 60° = \frac{AB}{300} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{300} \Rightarrow AB = 300\sqrt{3}$

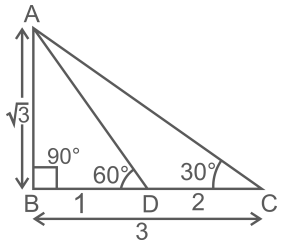
स्थिति (5)

जब कोण θ से 2θ बदल जाता है -



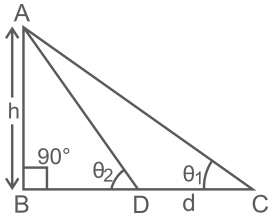
$h^2 = y^2 - x^2$

उदाहरण :- एक टावर के शीर्ष से जमीन पर एक बिंदु A का उन्नयन कोण 30° है। टावर के निचले भाग की ओर 10 मीटर जाने पर उन्नयन कोण 60° में बदल जाता है। टावर की ऊंचाई कितनी होगी?
हल :-



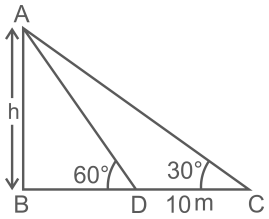
प्रश्न के अनुसार,
2 इकाई = 10 मीटर (दिया गया है)
1 इकाई = 5 मीटर
अब, टावर की ऊंचाई ($\sqrt{3}$) = $5\sqrt{3}$ मीटर
Exam hall approach:-
सर्वसमिका का प्रयोग करने पर ,
$h^2 = y^2 - x^2$
जहां DC(y) = 10 मीटर, BD(x) = 5 मीटर और AB(h) = ?
इसलिए,
$\Rightarrow h^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow h = \sqrt{75} \Rightarrow h = 5\sqrt{3}$ मीटर

स्थिति (6)



$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$

उदाहरण :- एक टावर के शीर्ष से जमीन पर एक बिंदु A का उन्नयन कोण 30° है। टावर के निचले भाग की ओर 10 मीटर जाने पर उन्नयन कोण 60° में बदल जाता है। टावर की ऊंचाई कितनी होगी?
हल :-

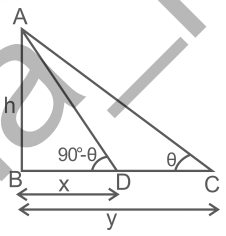


सर्वसमिका का प्रयोग करने पर ,
$d = h(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)$
$\Rightarrow 10 = h(\cot 30° - \cot 60°)$
$\Rightarrow 10 = h(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow 10 = h(\frac{3-1}{\sqrt{3}})$
$\Rightarrow 10 = h\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

अन्य महत्वपूर्ण परिणाम

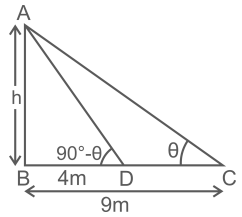
जब कोण पूरक हों

(a)



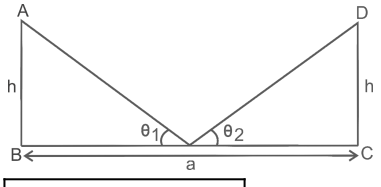
h = $\sqrt{xy}$

उदाहरण :- टावर के आधार से 4 मीटर और 9 मीटर की दूरी पर और उसके साथ एक ही सीधी रेखा में दो बिंदुओं से टावर के शीर्ष के उन्नयन कोण पूरक हैं। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
हल :-



सर्वसमिका का प्रयोग करने पर ,
$\Rightarrow h = \sqrt{xy} \Rightarrow h = \sqrt{4 \times 9} \Rightarrow h = 6$ m

(b)



$a = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$

@apna_pdf

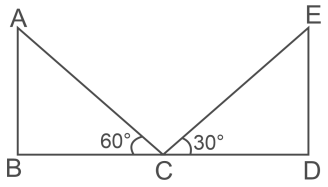
उदाहरण :- 50 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर समान ऊंचाई के दो ऊर्ध्वाधर दीप-स्तम्भ हैं। दीप-स्तम्भ के बीच सड़क पर एक बिंदु से, दीप-स्तम्भ के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° और 30° है। दीप-स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

RRB JE 27/05/2019 (Evening)

(a) 22.50 मीटर (b)23.75 मीटर

(c) 18.65 मीटर (d) 21.65 मीटर

हल :-



Δ ABC में,

$\tan 60° = \frac{AB}{(50-x)}$

$\Rightarrow AB = (50 - x)\sqrt{3}$ ------समीकरण.(1)

Δ ECD में,

$\tan 30° = \frac{ED}{x}$

$\Rightarrow ED = \frac{x}{\sqrt{3}}$ --------समीकरण-(2)

समीकरण (1) और समीकरण (2) को हल करने पर ,

$\frac{x}{\sqrt{3}} = (50 - x)\sqrt{3} \Rightarrow x = 150 - 3x$

$\Rightarrow 4x = 150 \Rightarrow x = \frac{75}{2}$

तो दीप-स्तम्भ की ऊँचाई = ED =AB

$= \frac{75}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{25 \times \sqrt{3}}{2} = 12.5\sqrt{3}$

$= 12.5 \times 1.73 = 21.65$ m

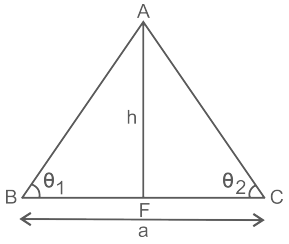
Exam hall approach:-

$50 = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$

$50 = h(\cot 60° + \cot 30°) \Rightarrow h = \frac{25\sqrt{3}}{2} = 12.5\sqrt{3}$

$= 12.5 \times 1.73 = 21.65$ m

(c)



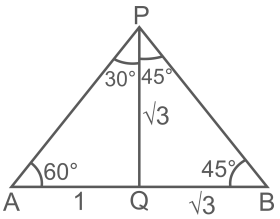
a = h$(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$

उदाहरण :- दो बिंदु A और B एक मीनार के विपरीत और जमीन पर स्थित हैं। A, B की तुलना में 42 मीटर मीनार के तल के निकट है। यदि A और B से मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 45° है, तो मीनार की निकटतम ऊँचाई क्या है ?

SSC CPO 13/12/2019 (Evening)

(a) 94.6 m (b) 99.4 m (c) 88.2 m (d) 87.6 m

हल :- माना PQ मीनार की ऊँचाई है।



हम इस सर्वसमिका का प्रयोग तब करेंगे जब हमें AB का प्रत्यक्ष मान दिया जाएगा।

$\Rightarrow a = h(\cot\theta_1 + \cot\theta_2)$

प्रश्न के अनुसार,

$\Rightarrow 1$ इकाई $= \frac{42}{\sqrt{3}-1}$

$\Rightarrow (\sqrt{3} + 1)$ इकाई $= \frac{42(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = AB$

इसलिए,

$\Rightarrow \frac{42(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = h(\cot 60° + \cot 45°)$

$\Rightarrow \frac{42(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = h(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1) \Rightarrow \frac{42(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = h(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}})$

$\Rightarrow h = \frac{42\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{42 \times 1.73}{0.73} \approx 99.5$ मीटर

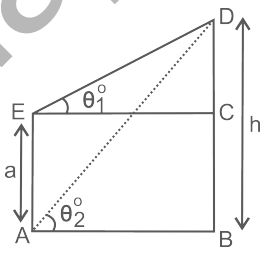
Exam hall approach:-

प्रश्न के अनुसार,

$(\sqrt{3} - 1)$ इकाई = 42 मीटर

तब, $\sqrt{3}$ इकाई $= \frac{42\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{42 \times 1.73}{0.73} \approx 99.5$ मीटर

(d)



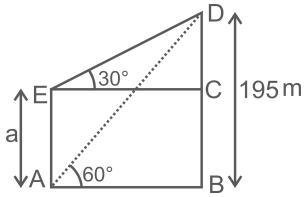
$h = \frac{a\cot\theta_1}{\cot\theta_1 - \cot\theta_2}$

उदाहरण :- एक 195 मीटर ऊंची चट्टान की चोटी से, मीनार के ऊपर और नीचे के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (मीटर में)।

SSC CGL 18/04/2022 (Evening)

(a) $195\sqrt{3}$ (b) 195 (c) 130 (d) 65

हल :-



माना टावर की ऊंचाई (EA) = a

सर्वसमिका का प्रयोग करने पर ,

$\Rightarrow h = \frac{a\cot\theta_1}{\cot\theta_1 - \cot\theta_2}$

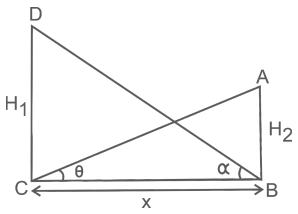
@apna_pdf

$\Rightarrow 195 = \frac{a\cot 30°}{\cot 30° - \cot 60°}$

$\Rightarrow 195 = \frac{a \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow 195 = \frac{a \times \sqrt{3}}{\frac{3-1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow 195 = \frac{a \times 3}{2}$

$\Rightarrow$ a = 130 m

(e)



यदि $\theta + \alpha = 90°$ तब,

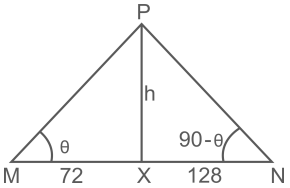
$x = \sqrt{H_1 H_2}$

उदाहरण :- 72 m और 128 m की दूरी पर क्रमशः बिंदु M और N से एक ऊंची इमारत के शीर्ष का उन्नयन कोण, इमारत के आधार से और इसके साथ एक ही सीधी रेखा में, पूरक हैं। इमारत की ऊंचाई (मीटर में) क्या है?

SSC CGL 12/04/2022 (Afternoon)

(a) 84 (b) 96 (c) 80 (d) 90

हल :- माना भवन की ऊंचाई = h

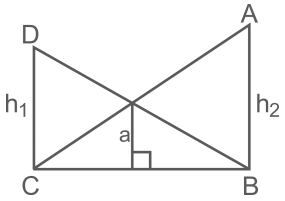


जब कोण पूरक होते हैं,

ऊँचाई (h^2) = इमारत से दो बिंदुओं की दूरी का गुणनफल

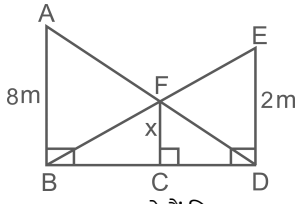
$\Rightarrow h = \sqrt{72 \times 128} = \sqrt{9216}$ = 96 m

(f)



$\frac{1}{a} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$

उदाहरण :- निम्नलिखित चित्र में, AB = 8 मीटर, FC = x मीटर और ED= 2 मीटर प्रत्येक BD के लंबवत हैं तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल :- हम जानते हैं कि,

$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1+4}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

जब वस्तु एक बिंदु से दूसरे बिंदु पर अपनी स्थिति बदलती है

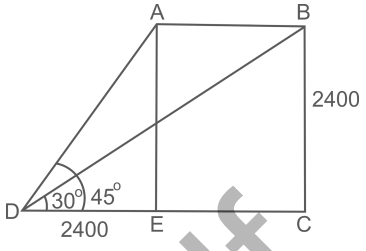
उदाहरण :- भूतल पर स्थित किसी बिंदु से एक हवाई जहाज का उन्नयन कोण 45° है। क्षैतिज रूप से 12 सेकंड की उड़ान के बाद, उन्नयन कोण बदलकर 30° हो जाता है। यदि हवाई जहाज 2400 m की ऊंचाई पर उड़ रहा है, तो हवाई जहाज की चाल (km/h में) ज्ञात कीजिए।

NTPC CBT II (15/06/2022) 3rd Shift

(a) $72(1 + \sqrt{3})$ (b) $720(\sqrt{3} + 1)$

(c) $720(\sqrt{3} - 1)$ (d) $72(\sqrt{3} - 1)$

हल :-



$\tan 45° = \frac{AE}{DE} = \frac{2400}{DE} \Rightarrow DE = 2400$ मीटर

अतः, $\tan 30° = \frac{BC}{DE + EC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2400}{2400 + EC}$

$EC = 2400(\sqrt{3} - 1)$

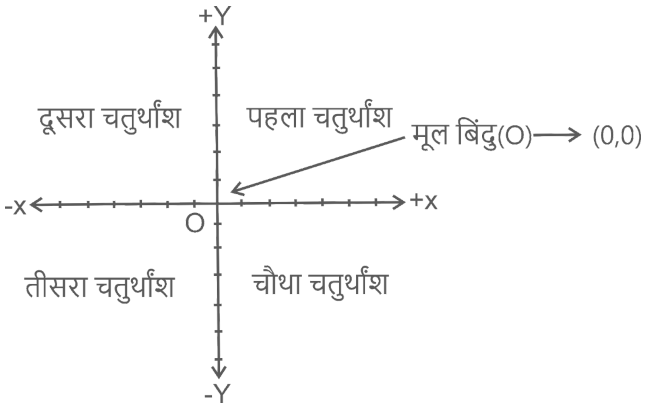
हवाई जहाज की गति = $\frac{2400\,(\sqrt{3}-1)}{12} \times \frac{18}{5}$

$= 720\,(\sqrt{3} - 1)$ km/h

@apna_pdf

निर्देशांक ज्यामिति

निर्देशांक ज्यामिति, ज्यामिति की एक प्रणाली है जहाँ क्रमित संख्याओं के युग्म का उपयोग करके समतल पर बिंदुओं की स्थिति का वर्णन किया जाता है। किसी बिंदु के x - निर्देशांक और y - निर्देशांक को मिलाकर उस बिंदु के निर्देशांक के रूप में जाना जाता है



प्रमुख बिंदु :-

• **निर्देशांक अक्ष :-** कार्टेशियन प्रणाली (Cartesian System) में लंबवत रेखाएं x अक्ष और y अक्ष हैं। उन दोनों को एक साथ निर्देशांक अक्ष के रूप में जाना जाता है।

• **मूल बिंदु :-** निर्देशांक अक्षों का प्रतिच्छेदन बिंदु मूल बिंदु (origin) होता है। मूल के निर्देशांक (0, 0) हैं।

• **भुज :-** x-निर्देशांक को भुज कहते हैं। यह y अक्ष से एक बिंदु की लंबवत दूरी है।

• **कोटि :-** y-निर्देशांक को कोटि कहते हैं। यह x-अक्ष से किसी बिंदु की लंबवत दूरी है।

• यदि y = a, जहाँ a स्थिरांक है तो y = a, x - अक्ष के समानांतर एक सीधी रेखा को दर्शाता है।

• यदि x = a, जहाँ a स्थिरांक है तो x = a, y - अक्ष के समानांतर एक सीधी रेखा को दर्शाता है।

• मूल बिंदु से होकर जाने वाली रेखा के लिए दिए गए समीकरण का एक निर्देशांक (0 , 0) होना चाहिए।

महत्वपूर्ण सूत्र

दूरी सूत्र

यदि बिंदु $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ समतल xy पर स्थित हैं तो,

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

उदाहरण :- यदि दो बिंदुओं $(x, 7)$ और $(1, 15)$ के बीच की दूरी 10 इकाई है , तो x का संभावित मान = ?
RRB NTPC CBT - I 08/03/2021 (Evening)

हल :- दूरी सूत्र = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

10 इकाई = $\sqrt{(1 - x)^2 + (15 - 7)^2}$

$10 = \sqrt{(x^2 + 1 - 2x) + (8)^2}$

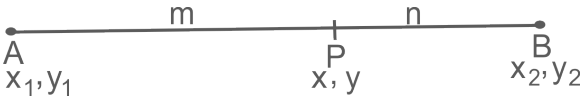
$100 = x^2 + 1 - 2x + 64$

$100 - 65 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$

जहाँ $x = 7, -5$

विभाजन सूत्र

(a) आंतरिक विभाजन :-



$$\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n} \Rightarrow P(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

उदाहरण :- बिंदुओं (- 5 , 5) और (7 , - 3) वाले रेखा खण्ड को आंतरिक रूप से 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक क्या हैं?
RRB ALP Tier - I (29/08/2018) Morning

(a) (- 2, 3) (b) $(\frac{5}{2}, 0)$ (c) (1, 1) (d) (4, - 1)

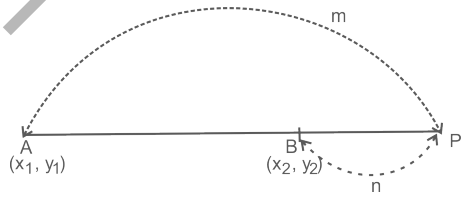
हल :- जैसा कि हम जानते हैं, बिंदुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को जोड़ने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से m : n के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक दिए जाते हैं;

$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

इसलिए, बिंदु के आवश्यक निर्देशांक

$= \left(\frac{3 \times 7 + 1 \times -5}{3+1}, \frac{3 \times -3 + 1 \times 5}{3+1}\right) = \left(\frac{16}{4}, \frac{-4}{4}\right) = (4, -1)$

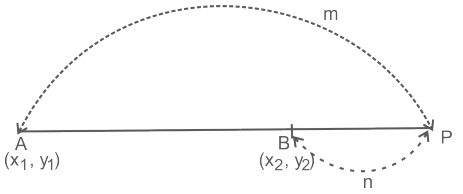
(b) बाह्य विभाजन :-



$$\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n} \Rightarrow P(x, y) = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

उदाहरण :- विभाजन सूत्र का उपयोग करके, बिंदु C के निर्देशांक निर्धारित करें जो बिंदु A (-3, -1), और B (-1, 0) को 2 : 3 के अनुपात में बाह्य रूप से विभाजित करता है।

हल :- हम जानते हैं कि,



$P(x, y) = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$

प्रश्न के अनुसार,

बिंदु के आवश्यक निर्देशांक

$= \left(\frac{(2 \times -1) - (3 \times -3)}{2-3}, \frac{(2 \times 0) - 3 \times -1}{2-3}\right)$

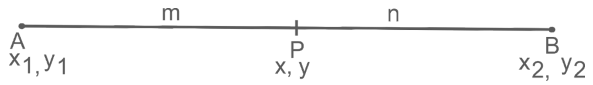
$= \left(\frac{-2+9}{-1}, \frac{0+3}{-1}\right) = (-7, -3)$

(c) मध्यबिंदु विभाजन :

यह विभाजन सूत्र से लिया गया है।एक बिंदु के निर्देशांक जो रेखाखंडों को 1 : 1

@apna_pdf

के अनुपात में विभाजित करते हैं, मतलब (m : n) = (1 : 1)

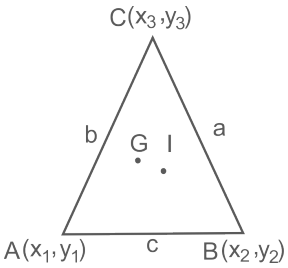


$\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n} = \frac{1}{1} \Rightarrow P(x, y) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$

उदाहरण :- उन बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो A(-2, 2) और B(2, 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को दो बराबर भागों में विभाजित करते हैं।
हल :- माना बिंदु P

$\Rightarrow P(x, y) = (\frac{-2 + 2}{2}, \frac{2 + 8}{2}) \Rightarrow P(x, y) = (0, 5)$

केन्द्रक सूत्र (G) और अंतःकेन्द्र (I) सूत्र

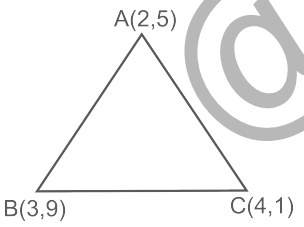


केन्द्रक (G) = $(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$

अंतःकेन्द्र सूत्र (I) = $(\frac{x_1 a + x_2 b + x_3 c}{a + b + c}, \frac{y_1 a + y_2 b + y_3 c}{a + b + c})$

उदाहरण :- बिन्दुओं (2 , 5) , (3 , 9) और (4 , 1) से बने त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए।
RRB NTPC CBT - I 11/03/2021 (Evening)
(a) (6, 6) (b) (9, 15) (c) (3, 9) (d) (3, 5)

हल :-



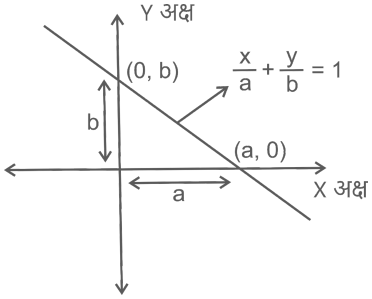
माना, त्रिभुज का केन्द्रक = (X , Y)

अब, $X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{2 + 3 + 4}{3} = \frac{9}{3} = 3$

और $Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{5 + 9 + 1}{3} = \frac{15}{3} = 5$

अत: त्रिभुज का केन्द्रक = (X , Y) ⇒ (3 , 5)

रेखा का अन्तःखण्ड रूप :-



उदाहरण :- समीकरण $12x + 3y - 24 = 0$ को अंतःखंड रूप में बदलें। रेखा का x - अंतःखंड और y - अंतःखंड क्या है?
हल :- एक रेखा का समीकरण दिया गया है $12x + 3y - 24 = 0$.
तब, अंतःखंड रेखा का समीकरण बनाता है।

$\Rightarrow 12x + 3y = 24 \Rightarrow \frac{12x}{24} + \frac{3y}{24} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$

अब, x - अंतःखंड = (2, 0) और y - अंतःखंड = (0 , 8)

रेखा की प्रवणता :-

- यदि (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) रेखा L पर कोई दो बिंदु हैं, तो $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ के अनुपात को रेखा L का प्रवणता कहा जाता है।

उदाहरण :- बिंदु (7, 5) और (-3, -5) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात करें ?
DMRC CRA 18/02/2020 (2nd shift)
(a) 1 (b) - 1 (c) √3 (d) 0

हल :- बिंदुओं (a_1, b_1) (a_2, b_2) की प्रवणता = $\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$

फिर, (7, 5) और (-3, -5) की प्रवणता = $\frac{-5 - 5}{-3 - 7} = 1$

- दो रेखाओं की प्रवणता क्रमशः m_1 और m_2 के बीच का कोण,

$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$

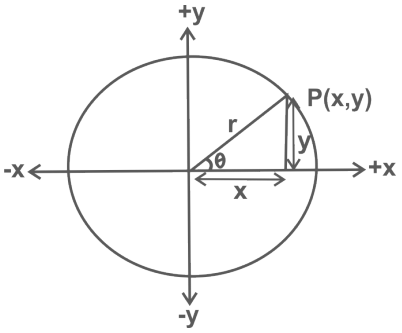
उदाहरण :- रेखा 4x - y + 5 = 0 के साथ 45° का कोण बनाने वाली रेखाओं की प्रवणता है।
हल :- दिया गया है कि :
$4x - y + 5 = 0$ और कोण$(\theta) = 45°$
$\Rightarrow y = 4x + 5$ ....(i)
रेखा के सामान्य समीकरण (y = mx + c) से उपरोक्त समीकरण की तुलना करना,
तब, $m_1 = 4$ और $m_2 = ?$

$\Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$

$\Rightarrow \tan 45° = \left|\frac{m_2 - 4}{1 + 4m_2}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{m_2 - 4}{1 + 4m_2}\right| \Rightarrow 1 = \frac{m_2 - 4}{1 + 4m_2}$

$\Rightarrow 1 + 4m_2 = m_2 - 4 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{3}$

किसी बिंदु के ध्रुवीय निर्देशांक :-

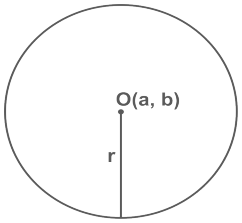


$X = r\cos\theta$, $Y = r\sin\theta$
$r^2 = X^2 + Y^2$ और $\tan\theta = \frac{Y}{X}$

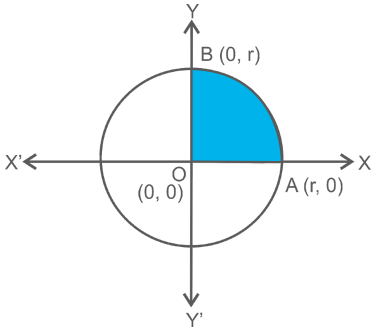
@apna_pdf

उदाहरण :- वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
SSC CHSL 08/08/2023 (4th Shift)
(a) 25 units (b) 5 units
(c) 2 units (d) 12 units
हल :-
मूल बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण :-
$x^2 + y^2 = r^2$ .....(r = त्रिज्या)
यहाँ, $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow$ त्रिज्या = 5 इकाई

- यदि (a, b) वृत्त के केंद्र है और r त्रिज्या है तो वृत्त का समीकरण $= (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



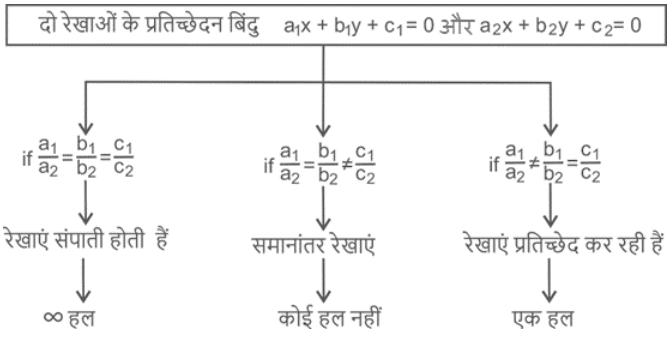
- यदि मूल बिंदू वृत्त का केन्द्र हो तब वृत्त का समीकरण होगा ।



i) $x^2 + y^2 = r^2$
ii) घिरे हुए वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

उदाहरण :- यदि (3, 4) वृत्त का केंद्र है और 5 सेमी त्रिज्या है तो वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
हल :-
वृत्त का समीकरण = $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$
$\Rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = 25$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 = 25$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

अवधारणा



उदाहरण :- K के किस मान के लिए समीकरण युग्म 10x + 5y - (k - 5) = 0, 20x + 10y - k = 0 का अनंत हल है?
हल :-
दिया गया है कि समीकरण 10x + 5y = (k - 5) और 20x + 10y = k

अनन्त हल होने की स्थिति → $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
इसलिए,
$\Rightarrow \frac{10}{20} = \frac{5}{10} = \frac{(k-5)}{k}$
$\Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{(k-5)}{k} \Rightarrow 5k = 10k - 50 \Rightarrow 5k = 50 \Rightarrow k = 10$
या
$\Rightarrow \frac{10}{20} = \frac{(k-5)}{k} \Rightarrow 10k = 20k - 100 \Rightarrow 10k = 100 \Rightarrow k = 10$

उदाहरण :- k के किस मान के लिए समीकरण युग्म 4x - 3y = 9, 2x + ky = 11 का कोई हल नहीं है?
हल :-
दिया गया है कि समीकरण 4x - 3y = 9 और 2x + ky = 11
कोई हल न होने की स्थिति → $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
इसलिए,
$\Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{-3}{k} \neq \frac{9}{11} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{-3}{k} \Rightarrow k = \frac{-3}{2}$

उदाहरण :- k के किस मान के लिए समीकरण युग्म 4x - 3y = 9, 2x + ky = 11 का एक ही हल है?
हल :-
दिया गया है कि समीकरण 4x - 3y = 9 और 2x + ky = 11
एक हल होने की स्थिति → $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
इसलिए,
$\Rightarrow \frac{4}{2} \neq \frac{-3}{k} = \frac{9}{11} \Rightarrow \frac{-3}{k} = \frac{9}{11} \Rightarrow 9k = -33 \Rightarrow k = \frac{-33}{9}$

एक रेखा के समीकरण का अंत:खण्ड रूप :-

- एक रेखा के समीकरण का प्रतिच्छेदन रूप है, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, जहां 'a' रेखा का प्रतिच्छेदन x है और 'b' रेखा का प्रतिच्छेदन y है।

- एक बिंदु (x_1, y_1) से रेखा ax + by + c = 0 तक लंबवत दूरी,
$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

उदाहरण :- मूल बिंदु से रेखा $4x + 3y + 6 = 0$ की दूरी है:
RRB NTPC CBT - I 04/03/2021 (Morning)
(a) $\frac{7}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{6}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$
हल :- O(0 , 0) से रेखा $4x + 3y + 6 = 0$ की लंबवत लंबाई = d
$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
$d = \frac{|4 \times 0 + 3 \times 0 + 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$

• समानांतर रेखाओं के बीच की दूरी है :-

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$D = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

उदाहरण :- समानांतर रेखाओं 3x + 4y + 7 = 0 और 3x + 4y - 5 = 0 के

@apna_pdf

बीच की दूरी की गणना करें।
हल :- हम जानते है कि,
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$\Rightarrow D = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

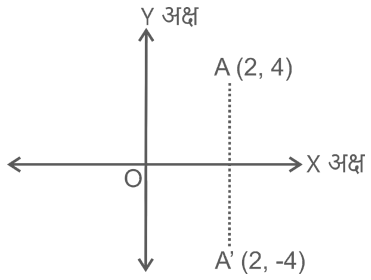
इसलिए,

$\Rightarrow D = \left|\frac{7+5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{12}{\sqrt{9+16}}\right| = \frac{12}{5}$

• रेखा का समीकरण :-

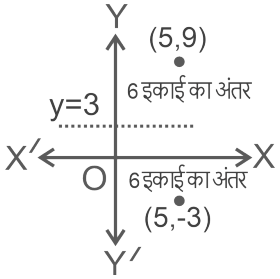
(i) समान्य रूप : Ax + By + C = 0
(ii) प्रवणता प्रतिच्छेद रूप (Slope Intercept Form): माना x, y उस बिंदु का निर्देशांक है जिससे होकर एक रेखा गुजरती है, m एक रेखा का ढलान (slope) है, और c, y को प्रतिच्छेद करता है,
तो एक रेखा का समीकरण : y = mx + c

परावर्तन :- किसी छवि को पलटना ज्यामिति में परावर्तन कहलाता है। .



परावर्तन स्तिथि
• **X - अक्ष (a, b) → (a, - b)**
• **Y - अक्ष (a, b) → (-a, b)**
• **रेखा Y= X(a, b) → (b, a)**
• **रेखा Y = - X(a, b) → (-b , -a)**

उदाहरण :- रेखा y = 3 में, बिंदु (5, - 3) का प्रतिबिंब क्या है
SSC CGL Tier II (18/11/2020)
(a) (5, -6) (b) (-5, 3) (c) (5, 9) (d) (5, 3)
हल :- y = 3, x अक्ष के समानांतर है इसलिए x अक्ष पर परावर्तन लंबवत दूरी (5, –3) नहीं बदलेगी, (y = 3) = 6 इकाई
रेखा के दूसरी ओर 6 इकाइयाँ (y = 3)
= 3 + 6 = 9 , तो बिंदु = (5 , 9)



• एक वृत्त का समीकरण :-

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, जहां वृत्त का केंद्र (– g , – f) और
त्रिज्या (r) $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ है

उदाहरण :- वृत्त $x^2 + y^2 + 7x + 4y + 9 = 0$. की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ?
RRB NTPC CBT - I 04/03/2021 (Morning)

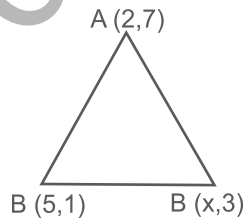
(a) $\frac{\sqrt{19}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{23}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{29}}{2}$

हल :- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, केंद्र (– g , – f) और
$r^2 = g^2 + f^2 - c$ के बराबर त्रिज्या वाले वृत्त का प्रतिनिधित्व करता है।
$x^2 + y^2 + 7x + 4y + 9 = 0$
जहाँ, g = - $\frac{7}{2}$, f = - 2 और c = 9
त्रिज्या = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$
= $\sqrt{\frac{49}{4} + 4 - 9} = \sqrt{\frac{49}{4} - 5} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

• त्रिभुज का क्षेत्रफल :- यदि बिंदु A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) और C (x_3, y_3) त्रिभुज के शीर्ष हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है :

$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

उदाहरण :- यदि (2 , 7) , (5 , 1) , (x , 3) एक त्रिभुज के शीर्ष हैं जिसका क्षेत्रफल 18 (वर्ग इकाई) है , तो x के संभावित मान ज्ञात कीजिए ? RRB NTPC CBT - I 12/01/2021 (Morning)
(a) - 10 या - 2 (b) 10 या - 2
(c) 10 या 2 (d) - 10 या 2
हल :-



त्रिभुज का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

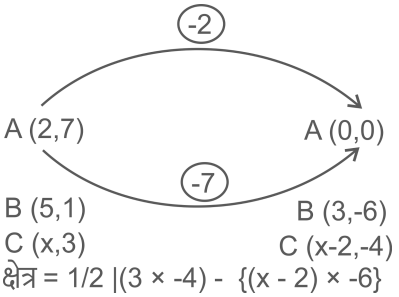
$18 = \frac{1}{2}|2(1 - 3) + 5(3 - 7) + x(7 - 1)|$

$18 = \frac{1}{2}|-4 - 20 + 6x|$

$36 = |-24 + 6x|$

"Mode" में हमे +ve और -ve दोनों तरह के मान प्राप्त होते है।
$36 = \pm|-24 + 6x|$
$36 = -24 + 6x$ और $36 = 24 - 6x$
$x = 10$ या $x = -2$

Example hall approach: दिए गए निर्देशांकों में से किसी एक को शून्य बनाइए, शेष निर्देशांकों के साथ वही क्रिया कीजिए ।



क्षेत्र = 1/2 |(3 × -4) - {(x - 2) × -6}

$18 = \frac{1}{2}|(-12) - \{-6x + 12\}|$
$36 = |(-12) + 6x - 12| = |6x - 24|$
$36 = \pm|-24 + 6x|$
$36 = -24 + 6x$ और $36 = 24 - 6x$
$x = 10$ और $x = -2$

@apna_pdf

क्रमचय और संचय

क्रमचय

क्रमचय की परिभाषा : क्रमचय एक समय में कुछ या सभी वस्तुओं को लेकर निश्चित क्रम में एक व्यवस्था है।

क्रमगुणांक

(I) $n! = n \times (n-1) \ldots\ldots 3 \times 2 \times 1$
(II) $0! = 1$
(III) ऋणात्मक संख्याओं के गुणनखंड परिभाषित नहीं हैं।

क्रमचय सूत्र :-

a) एक समय में 'r' लिए गए 'n' विभिन्न वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या, जहाँ पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, n द्वारा दी गई है

$$n_{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

जहाँ $0 \le r \le n$

b) एक समय में 'r' लिए गए 'n' विभिन्न वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या, जहां पुनरावृत्ति की अनुमति है, द्वारा दी गई है

n^r , जहाँ , $0 \le r \le n$

c) एक समय में ली गई n वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या, जहां p_1 वस्तुएं पहली तरह की हैं, p_2 वस्तुएं दूसरी तरह की हैं, ..., p_k वस्तुएं k^{th} तरह की हैं और बाकी यदि कोई हो, और यदि सभी अलग हैं - $\frac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_k!}$

d) वृत्ताकार क्रमचय: एक वृत्त के चारों ओर एक समय में n विभिन्न वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या दी गई है

$P_n = (n-1)!$

उदाहरण:- एक बैग में 6 लाल गेंदें और 8 हरी गेंदें हैं। प्रतिस्थापन के साथ एक-एक करके यादृच्छिक रूप से 2 गेंदें निकाली जाती हैं। दोनों गेंदों के हरे होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए
RRB Clerk Pre 13/09/2020 (1st Shift)
(a) $\frac{16}{49}$ (b) $\frac{25}{49}$ (c) $\frac{12}{49}$ (d) $\frac{21}{49}$ (e) इनमें से कोई नहीं
हल:- कुल गेंदें = 6 + 8 = 14
हरी गेंदों की संख्या = 8
प्रतिस्थापन के साथ एक-एक करके यादृच्छिक रूप से 2 गेंदें निकाली जाती हैं
फिर, संभावना है कि दोनों गेंदें हरी हैं

$$= \frac{{}^{8}C_1}{{}^{14}C_1} \times \frac{{}^{8}C_1}{{}^{14}C_1} = \frac{8}{14} \times \frac{8}{14} = \frac{16}{49}$$

* क्रमचय मे, चीजों की उपस्थिति के क्रम को ध्यान में रखा जाता है।

उदाहरण :- माना कि तीन वस्तुएँ A, B C हैं।
जब एक समय में एक ही वस्तु ली जाती है तो इन वस्तुओं का क्रमचय या चयन (3) - A, B, C
जब एक समय में दो वस्तुएँ ली जाती हैं तो इन वस्तुओं का क्रमचय या चयन (6) - (A, B), (B, A), (B, C), (C, B), (C, A), (A, C)
जब एक समय में तीन वस्तुएँ ली जाती हैं तो इन वस्तुओं का क्रमचय या चयन (6) - (A,B, C) (A, C, B)(B, A, C)(B, C, A)(C, A, B)(C, B, A)

$P(n, r) = {}^{n}P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

उदाहरण :- यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, तो अंक 0, 1, 4, 5, 7 का उपयोग किए बिना कितनी तीन अंकों की संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?
Bihar Police Cons. 14/03/2021 (2nd Shift)
(a) 60 (b) 120 (c) 504 (d) 720
हल:- n =वह अंक जो संख्या 0,1,4,5,7 में नहीं हैं
तो , n = (2 , 3 , 6 , 8 , 9) = 5 , $r = 3$
(क्योकि हमे तीन अंको की संख्या चाहिए)
इसलिए , ${}^{5}P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$

उदाहरण :- ALLAHABAD के अक्षरों के क्रम परिवर्तनकी संख्या है
Haryana CET 01/11/2021 (2nd Shift)
(a) 9! (b) $\frac{9!}{2!\,(4!)}$ (c) $\frac{9!}{3!}$ (d) $\frac{9!}{4!}$
हल:- आवश्यक संभावित क्रमचय = $\frac{ALLAHABAD}{AAAA\,,LL} = \frac{9!}{2!\;\;(4!)}$

संचय

संचय समूहीकरण में उपलब्ध वस्तुओं से बनने वाले विभिन्न समूहों की संख्या संचय का उपयोग करके ज्ञात की जा सकती है।

a). n विभिन्न वस्तुओं में से एक बार में 'r' वस्तुएँ लेकर बनाए गए कुल क्रमचयों की संख्या, जहाँ पुनरावृत्ति नहीं होती है, को n_{C_r} से व्यक्त करते हैं।

तब : $n_{C_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$, $0 \le r \le n$

नोट :- (i) $n_{C_1} = n$ और (ii) $n_{C_0} = 1$

उदाहरण :- माना कि तीन वस्तुएँ A, B और C हैं,
एक समय में एक ली गई इन वस्तुओं का संयोजन या चयन(3) - A, B, C
एक समय में दो ली गई इन वस्तुओं का संयोजन या चयन (3) - (A, B), (B, C), (C, A)
एक समय में तीन ली गई इन वस्तुओं का संयोजन या चयन(1) -(A, B, C)

$C(n, r) = {}^{n}C_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

* 'N' चीजों से ली गई 'r' चीजों के लिए क्रमचय और संचय के बीच संबंध है।
${}^{n}P_r = r! \times {}^{n}C_r$

उदाहरण:- यदि ${}^{n}C_x = 126$ और ${}^{n}P_x = 3024$ तो n और x ज्ञात करे
HCS CSAT (12/09/2021)
(a) 7,3 (b) 8,4 (c) 8,3 (d) 9,4
हल:- ${}^{n}P_x = x!\ {}^{n}C_x$
$3024 = 126\ x! \Rightarrow 24 = x!$
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$
तो, x = 4
अब , ${}^{n}C_x = {}^{n}C_4 = 126$
$\frac{n!}{4!\,(n-4)!} = 126$
$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{4!\,(n-4)!} = 126$
$n(n-1)(n-2)(n-3) = 126 \times 4! = 6 \times 7 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$n(n-1)(n-2)(n-3) = 9 \times 8 \times 7 \times 6$
तो , n = 9
अतः, n = 9 और x = 4

@apna_pdf

• गिनती का मौलिक सिद्धांत (वास्तव में गिनती किए बिना गिनती)

यदि एक घटना A 'x' भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है और दूसरी घटना B 'y' भिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, तो विभिन्न तरीकों की कुल संख्या -
(I) दोनों घटनाओं का एक साथ घटित होना x × y है। (गुणन सिद्धांत)
(II) घटनाओं में से ठीक एक x + y घटित हो रहा है। (अतिरिक्त सिद्धांत)

उदाहरण: एक व्यक्ति को पटना से दिल्ली होते हुए मुंबई जाना है। वह 3 अलग-अलग तरीकों से पटना से दिल्ली जा सकता है और 4 अलग-अलग तरीकों से दिल्ली से मुंबई जा सकता है। फिर वह 3 × 4 =12 तरीकों से पटना से दिल्ली होते हुए मुंबई जा सकता है।

* क्रमचय और संचय के बीच अंतर

क्रमचय	संचय
व्यवस्था के क्रम/अनुक्रम की आवश्यकता होने पर उपयोग किया जाता है।	इसका उपयोग तब किया जाता है जब केवल संभावित समूहों की संख्या ज्ञात करनी होती है और व्यवस्था के क्रम/अनुक्रम की आवश्यकता नहीं होती है।
इसका प्रयोग अलग-अलग तरह की चीजों के लिए किया जाता है।	इसका उपयोग समान प्रकार की चीजों के लिए किया जाता है।
तीन दी गई चीजों a, b, c में से दो चीजों का **क्रमचय** ab, ba, bc, cb, ca, ac है।	तीन दी गई चीजों a, b, c में से दो चीजों का **संचय** ab, bc, ca है।

नोट: n और r मानों के दिए गए सेट के लिए, क्रमचय, संचय से बड़ा होता है।

विविध

उदाहरण :- 'POPULAR' शब्द के अक्षरों को कितने अलग-अलग तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है ?
SBI Clerk Pre 29/02/2020 (1st Shift)
(a) 1650 (b) 1780 (c) 6800 (d) 2520
(e) इनमें से कोई नहीं
हल:- 'POPULAR' शब्द में अक्षरों की कुल संख्या = 7
दोहराया गया अक्षर = 2
तो, 'POPULAR' शब्द को व्यवस्थित करने के विभिन्न तरीकों की संख्या $\frac{7!}{2!}$

$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 2520$

उदाहरण :- DAUGHTER शब्द के सभी अक्षरों का एक-एक बार उपयोग करके कितनी व्यवस्थाएँ बनाई जा सकती हैं ताकि स्वर हमेशा एक साथ आएँ?
DMRC CRA 17/02/2020 (2nd shift)
(a) 0234 (b) 3420 (c) 2340 (d) 4320
हल:- 'DAUGHTER' शब्द में
व्यंजन = 5 अक्षर, स्वर = 3 अक्षर
अब सभी स्वर एक साथ आने चाहिए इसलिए स्वरों के समूह को एक अक्षर मानें तो कुल अक्षर 6 होंगे।
प्रश्न के अनुसार,
तो, 6 अक्षरों को व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या = 6!
अब स्वर भी अपना स्थान बदल लेते हैं
तो, तरीकों की संख्या = 3!
अतः, आवश्यक तरीके = 6! ×3! = 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 3 × 2 = 4320

@apna_pdf

प्रायिकता

परिभाषा :- प्रायिकता (Probability) को किसी घटना के परिणामों की कुल संख्या के अनुकूल परिणामों की संख्या के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।
संक्षेप में प्रायिकता किसी घटना के घटित होने की संभावना को परिभाषित करती है।

उदाहरण :- एक सिक्के को उछालना, पासे को उछालना, कई गेंदों वाले थैले में से एक गेंद निकालना, आदि ऐसी सभी घटनाओं से प्रायिकता का पता चलता है।

प्रायिकता का सूत्र: $P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}$

प्रायिकता के महत्त्वपूर्ण नियम

a) किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता का मान 0 और 1 के बीच हो सकता है (0 भी एक प्रायिकता हो सकती है)।
b) किसी घटना की अधिकतम संभावना उसका प्रतिदर्श समष्टि है (प्रतिदर्श समष्टि संभावित परिणामों की कुल संख्या है)
c) एक असंभव घटना की संभावना फाई या शून्य है।
d) किसी घटना के लिए नकारात्मक संभावना नहीं हो सकती।
e) यदि A और B दो परस्पर अनन्य परिणाम हैं (दो घटनाएं जो एक ही समय में घटित नहीं हो सकती), तो A या B घटित होने की प्रायिकता है ।

प्रायिकता में महत्वपूर्ण पद

1. घटना : प्रायिकता में किसी प्रयोग के संभावित परिणाम को घटना कहते हैं।
घटना E की प्रायिकता एक संख्या P(E) से दर्शाते है ,
जैसे कि $0 \le P(E) \le 1$

2. प्रारंभिक घटना :- एक घटना जिसका केवल एक ही परिणाम होता है।
एक प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की सभी संभावनाओं का योग = 1

3. निश्चित घटना :- ऐसी घटना की प्रायिकता 1 के बराबर होती है।

4. असंभव घटनाएँ :- ऐसी घटना की प्रायिकता शून्य होती है।उदाहरण के लिए, एक पासे को फेंकने के प्रयोग में, 6 से बड़ी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता एक असंभव घटना है।

5. पूरक घटनाएँ :- किसी भी घटना के लिए,
$P(E) + P(\overline{E}) = 1$
जहाँ $\overline{E}$ का अर्थ "E नहीं" है।
साथ ही, $P(E) = 1 - P(\overline{E})$
यहाँ E और $\overline{E}$ को पूरक घटनाएँ कहते हैं।

उदाहरण :- 52 ताशों की अच्छी तरह से फेंटी गई गड्डी में से यादृच्छिक रूप से एक पत्ता निकाला जाता है। न तो लाल कार्ड और न ही बेगम मिलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
हल :- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
$P(\overline{A}) = 1 - P(\text{लाल कार्ड या बेगम})$
$P(\overline{A}) = 1 - (\frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52})$
$P(\overline{A}) = 1 - \frac{28}{52} = \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$

6. समप्रायिक परिणाम :- समान प्रायिकता वाले सभी परिणाम

7. प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) :- प्रतिदर्श समष्टि एक यादृच्छिक प्रयोग के संभावित परिणामों का संग्रह या समुच्चय है।
उदाहरण – एक सिक्के को एक बार उछालने के लिए प्रतिदर्श समष्टि S = {H, T}
एक सिक्के को दो बार उछालने के लिए प्रतिदर्श समष्टि S = {HH, HT, TH, TT}
एक पासा फेंकने के लिए प्रतिदर्श समष्टि S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

8. सरल घटना :- यदि किसी घटना E में प्रतिदर्श समष्टि का केवल एक प्रतिदर्श बिंदु हो, तो इसे सरल (या प्रारम्भिक) घटना कहते हैं।
उदाहरण – दो सिक्कों को उछालने के प्रयोग में, प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि है
S = { HH, HT, TH, TT }
इस प्रकार चार सरल घटनाएं हैं ,
ये,E_1={HH}, E_2= {HT}, E_3= {TH}, E_4= {TT}

9. मिश्र घटना :- यदि किसी घटना के एक से अधिक प्रतिदर्श बिंदु हों तो उसे मिश्र या संयुक्त घटना कहते हैं।
उदाहरण – "एक सिक्के को तीन बार उछालने" के प्रयोग में, घटनाएँ:
X– 'बिल्कुल एक हेड आया '
Y– 'कम से कम एक हेड आया'
Z– 'अधिकतम एक हेड आया' आदि।
सभी यौगिक घटनाएँ हैं।
इन घटनाओं से जुड़े S के उपसमुच्चय हैं
X = {HTT, THT, TTH}
Y= {HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH}
Z = {TTT, THT, HTT, TTH}
उपरोक्त प्रत्येक उपसमुच्चय में एक से अधिक प्रतिदर्श बिंदु हैं, इसलिए वे सभी मिश्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण :- एक सिक्के को 3 बार उछाला जाता है। ठीक 2 चित आने की प्रायिकता है
UPSC CAPF (07/08/2022)
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{5}{8}$
हल :- जब सिक्के को तीन बार उछाला जाता है तो कुल परिणाम = $2^3 = 8$
ठीक दो चित प्राप्त करने के लिए अनुकूल परिणाम
= (HTH)(HHT)(THH) = 3
अत: अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{3}{8}$

10. घटना A और B (A∩B) :-
दो समुच्चयों का प्रतिच्छेदन A∩B उन अवयवों का समुच्चय है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं, अर्थात, 'A और B दोनों' से संबंधित हैं।
मान लीजिए, , S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} , A = {2, 3, 5} और B = {1, 3, 5}
यहाँ, A∩B = {3, 5}

11. घटना 'A या B' ($A \cup B$) :-
जब समुच्चय A और B एक प्रतिदर्श समष्टि से जुड़ी दो घटनाएँ हैं, तो 'A∪B' का अर्थ हैं समुच्चय A और B में सभी मानों का समुच्चय
मान लीजिए , S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} , A = {2, 3, 5} और B = {1, 3, 5}
यहाँ, $A \cup B$ = {1, 2, 3, 5}

12. उपरोक्त दो घटनाओं के बीच संबंध :-
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

उदाहरण :- दो घटनाओं A और B के लिए, P(A) = $\frac{1}{3}$, P(B) = $\frac{1}{4}$ और P(A∪ B) = $\frac{1}{2}$ तो P($\frac{A}{B}$) = ?
RRB NTPC CBT - I 08/03/2021 (Evening)
हल :- दिया गया है कि,
P(A) = $\frac{1}{3}$, P(B) = $\frac{1}{4}$ और P(A∪ B) = $\frac{1}{2}$

@apna_pdf

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

$= \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$

अब, $P(\frac{A}{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{1}{12} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{3}$

13. घटना A लेकिन B नहीं :-

उन सभी तत्वों का समुच्चय जो A में मौजूद है लेकिन B में नहीं है, इस रूप में निरूपित किया जाता है :-

A - B = $A \cap B'$

14. घटना B लेकिन A नहीं :-

उन सभी तत्वों का समुच्चय जो B में मौजूद है लेकिन A में नहीं है।
इस रूप में निरूपित किया जाता है:-

$B - A = B \cap A'$

स्पष्ट समझ के लिए एक उदाहरण ले

उदाहरण :- माना → S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ,
A = {2, 3, 5} और B = {1, 3, 5}
A या B का अर्थ है $A \cup B$ = {1, 2, 3, 5}
A और B का अर्थ है A∩B = {3,5}
B लेकिन A नहीं का अर्थ है $B \cap A'$ = {1}
A लेकिन B नहीं का अर्थ है $A \cap B'$ = {2}
A नहीं का अर्थ है A' = {1, 4, 6, 7}
B नहीं का अर्थ है B' = {2, 4, 6, 7}

15. परस्पर अपवर्जी घटनाएँ :-

पारस्परिक अपवर्जी घटनाएँ या असंयुक्त घटनाएँ वे घटनाएँ हैं जो एक ही समय में घटित नहीं होती हैं।

उदाहरण :-
जब एक सिक्के को उछाला जाता है तो परिणाम या तो हेड या टेल होगा, लेकिन हम दोनों परिणाम प्राप्त नहीं कर सकते हैं।

16. संपूर्ण घटना :-

संपूर्ण घटनाएँ वे घटनाएँ होती हैं जिनका संघ (union) प्रतिदर्श समष्टि के प्रयोग के बराबर होता है। या E1, E2, E3.....En को संपूर्ण घटनाएँ कहा जाता है यदि उनमें से कम से कम एक आवश्यक रूप से घटित होती है, जब भी प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण :- किसी पासे को एक बार उछालने पर संभावित परिणाम या प्रतिदर्श समष्टि →
हल:- S = {1,2,3,4,5,6}
X : 4 से छोटी संख्या आती है
Y : 2 से बड़ी या 5 से छोटी संख्या आती है
Z : 4 से बड़ी संख्या आती है
अब, X∪Y∪Z = {1,2,3} ∪ {3,4} ∪ {5,6} = S
ऐसी घटनाओं को संपूर्ण कहा जाता है। यहाँ, यह स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है, जब भी प्रयोग किया जाएगा, उनमें से कम से कम एक अवश्य होगा।

17. स्वतंत्र घटनाएँ :-

परिभाषा 1 :- दो घटनाओं को स्वतंत्र कहा जाता है यदि उनमें से एक की घटना दूसरे की घटना से प्रभावित नहीं होती है।

उदाहरण :- ताश के 52 पत्तो की एक गड्डी से एक पत्ता बनाने के प्रयोग पर विचार करें, जिसमें प्रारंभिक घटनाओं को समान रूप से संभावित माना जाता है। यदि E और F घटनाओं को निरूपित करते हैं
'निकाला गया पत्ता हुकुम का है' और 'निकाला गया पत्ता एक इक्का है', इसलिए,

$P(E) = P(F) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

अर्थात दोनों समान हैं और दूसरे के घटित होने से प्रभावित नहीं होते।

परिभाषा 2 :- दो घटनाओं को स्वतंत्र कहा जाता है , यदि
P(F|E) = P(F) दिया है यदि P(E) ≠ 0
P(E|F) = P(E) दिया है यदि P(F) ≠ 0

परिभाषा 3 :- दो घटनाओं को स्वतंत्र कहा जाता है यदि $P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$

सिक्के

'n' सिक्के उछालने पर परिणामों की संख्या दर्शाने का सामान्य सूत्र 2^n है।.

पक्षपाती और निष्पक्ष सिक्का

निष्पक्ष सिक्का :- एक निष्पक्ष सिक्का जिसमें हेड या टेल आने की समान प्रायिकता होती है।

पक्षपाती सिक्का :- एक अनुचित सिक्का जिसमें हेड या टेल आने की असमान संभावना होती है।
ऐसे सिक्कों में एक विशेष फलक मिलने की कम या ज्यादा संभावना होती है।

निष्पक्ष सिक्का

i) एक सिक्के को फ्लिप करना या उछालना :- मान लीजिए कि एक सिक्का उछाला जाता है तो हमें दो संभावित परिणाम या तो एक हेड (H) या एक टेल (T) मिलते हैं, कोई अन्य संभावना नहीं है।और यह अनुमान लगाना असंभव है कि टॉस का परिणाम हेड होगा या टेल।
इसलिए , कुल संभावित परिणाम = 2

(a) यहाँ, एक हेड आने की प्रायिकता → $\frac{\text{हेड् आने के परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}}$

$= \frac{1}{2}$

(b) टेल आने की प्रायिकता → $\frac{\text{टेल आने के परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{2}$

ii) दो सिक्कों को फ्लिप करना या उछालना :- जब दो सिक्के उछाले जाते है तो हमें कुल चार (2^2) परिणाम मिलते हैं।
प्रतिदर्श समष्टि (sample space) = {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)},
परिणामों की कुल संख्या = 4

$P(2H) = P(0\ T) = \frac{\text{दो हेड वाले परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{1}{4}$

$P(1H) = P(1T) = \frac{\text{केवल एक हेड के परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(0H) = P(2T) = \frac{\text{बिना हेड वाले परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{1}{4}$

ii) तीन सिक्कों को फ्लिप करना या उछालना :- जब तीन सिक्के उछाले गए तो हमें कुल आठ (2^3 = 8) परिणाम प्राप्त हुए।
प्रतिदर्श समष्टि (sample space) = {(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H), (T, T, H), (T, H, T), (H, T, T), (T, T, T)}
परिणामों की कुल संख्या = 8

$P(0H) = P(3T) = \frac{\text{बिना हेड वाले परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{1}{8}$

@apna_pdf

$P(1H) = P(2T) = \frac{\text{केवल एक हेड के परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{3}{8}$

$P(2H) = P(1T) = \frac{\text{दो हेड वाले परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{3}{8}$

$P(3H) = P(0T) = \frac{\text{तीन हेड वाले परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{1}{8}$

पासा फेंकना

* n' पासे को उछालने पर परिणामों की संख्या दर्शाने का सामान्य सूत्र 6^n है।

i) एक पासा फेंकने पर :-

एक पासा फेंकने पर परिणामों की कुल संख्या 6 है,
प्रतिदर्श समष्टि (sample space): {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
एक पासा फेंकने पर प्रायिकता की अवधारणा को बेहतर ढंग से समझने में मदद करने के लिए निम्नलिखित कुछ संभावनाएँ हैं।

$P(\text{सम संख्या}) = \frac{\text{सम संख्या वाले परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{विषम संख्या}) = \frac{\text{विषम संख्या वाले परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{अभाज्य संख्या}) = \frac{\text{अभाज्य संख्या वाले परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ii) दो पासे फेंकने पर :-

दो पासे फेंकने पर परिणामों की कुल संख्या $6^2 = 36$ है।
दो पासों को फेंकने पर 36 परिणामों का प्रतिदर्श समष्टि (sample space) निम्नलिखित है।

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

दो पासों को फेंकने या एक पासे को दो बार फेंकने पर प्रायिकता की अवधारणा को बेहतर ढंग से समझने में मदद करने के लिए निम्नलिखित कुछ संभावनाएं हैं।

$P(\text{डब्लेट}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\text{कम से कम एक पासे पर 3}) = \frac{11}{36}$

$P(\text{7 का योग}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ताश के पत्ते

ताश के एक "मानक" डेक में 52 कार्ड होते हैं और इन्हें हुकुम (स्पेड) (♠), चिड़ी (क्लब) (♣), पान (हार्ट) (♥), और ईंट (डायमंड) (◆) के 4 सूटों में वर्गीकृत किया जाता है, जिनमें से प्रत्येक में 13 कार्ड होते हैं।
प्रत्येक सूट में 13 कार्ड होते हैं: Ace (इक्का), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, गुलाम (jack) , बेगम (Queen) और राजा (King)

प्रमुख बिंदु :-

संख्या कार्ड(2,3.....9,10) → 9 × 4 = 36,
फेस कार्ड (J,Q,K,) → 3 × 4 = 12
इक्का (Ace) कार्ड (A) → 1 × 4 = 4
ताश के पत्तों पर प्रायिकता की अवधारणा को बेहतर ढंग से समझने में मदद के लिए निम्नलिखित कुछ संभावनाएं हैं।

काला कार्ड निकलने की प्रायिकता → $P(\text{काला कार्ड}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

हार्ट का कार्ड निकलने की प्रायिकता → $P(\text{हार्ट का कार्ड}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

फेस कार्ड निकलने की प्रायिकता → $P(\text{फेस कार्ड}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

4 क्रमांक वाला कार्ड निकलने की प्रायिकता → $P(4) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

लाल कार्ड वाले 4 निकलने की प्रायिकता → $P(\text{4 लाल कार्ड}) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

उदाहरण:- अनिल ने 52 पत्तों की एक गड्डी रखी। यदि आप दो कार्ड चुनते हैं तो क्या प्रायिकता है कि दोनों इक्के हों?
RRB Clerk Pre 14/12/2021 (1st Shift)
हल :- इक्का कार्डों की संख्या = 4
जब 1 कार्ड लिया जाता है, तो संभावना है कि यह एक इक्का हो

$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

शेष कार्ड = 51
शेष इक्को के कार्ड = 3
अब, 51 पत्तों में से एक पत्ता निकाला जाता है, उसके इक्का होने की प्रायिकता

$= \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

इसलिए, संभावना है कि दोनों कार्ड इक्के हो = $\frac{1}{13} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$

सप्रतिबंध प्रायिकता

किसी घटना E की प्रायिकता को E की सप्रतिबंध प्रायिकता कहा जाता है, यह देखते हुए कि F पहले ही घटित हो चुकी है और इसे P(E|F) द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण :- एक सिक्के को तीन बार उछालने या तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि प्राप्त होता है
S = {HHH, THH, HTH, HHT, TTT, TTH, THT, HTT}
माना E घटना है, दो टेल आते हैं,
इसलिए E = {TTT, HTT, THT, TTH}

$\Rightarrow P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

और F वह घटना है जिसमें पहले सिक्के पर हेड आता है, इसलिए,

$H = \{HTT, HHH, HHT, HTH\} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$E \cap F = \{HTT\} \Rightarrow P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

अब, मान लीजिए कि यदि यह दिया गया है कि पहला सिक्का टेल दिखाता है, यानी F होता है, और फिर हमें E की प्रायिकता का पता लगाना होगा।
फिर इस स्थिति में , हमें सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात करनी होगी।
E की सप्रतिबंध प्रायिकता , यह देखते हुए कि F पहले ही हो चुका है, की गणना निम्नानुसार की जाती है

$P(E|F) = \frac{E \cap F \text{ के अनुकूल प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}{F \text{ के अनुकूल प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}$

$\Rightarrow P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

इसलिए, $P(E|F) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

क्रमचय और संचय द्वारा प्रायिकता

a). एक समय में 'r' लिए गए 'n' विभिन्न वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या, जहाँ पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है, n द्वारा दी गई है

$n_{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

जहाँ $0 \le r \le n$

@apna_pdf

b). n! = 1 × 2 × 3 ×.....×n

c). n! = n × (n - r)!

d). एक समय में 'r' लिए गए 'n' विभिन्न वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या, जहां पुनरावृत्ति की अनुमति है, द्वारा दी गई है

n^r , जहाँ , 0 ≤ r ≤ n

e). n विभिन्न वस्तुओं में से एक बार में 'r' वस्तुएँ लेकर बनाए गए कुल क्रमचयों की संख्या, जहाँ पुनरावृत्ति नहीं होती है, को n_{C_r} से व्यक्त करते हैं। तब:

$n_{C_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$, 0 ≤ r ≤ n

नोट:-

(i) n_{C_1} = n और **(ii)** n_{C_0} = 1

उदाहरण :- यदि हम एक समूह से यादृच्छिक रूप से 3 व्यक्तियों का चयन करते हैं, जिसमें 4 पुरुष, 3 महिलाएं और 2 लड़के हैं, तो 2 पुरुषों के चुने जाने की संभावना है:

RRB NTPC CBT - I 13/03/2021 (Morning)

हल :- कुल व्यक्ति = 9, पुरुष = 4

सूत्र ,

${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

अनुकूल परिणाम = ${}^4C_2 \times {}^5C_1\, 5C_1$

$= 6 \times 5 = 30$

कुल परिणाम = ${}^9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84$

अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{30}{84} = \frac{5}{14}$

उदाहरण :- मान लीजिए, एक थैले में 6 लाल, 4 सफेद और 8 नीली गेंदें हैं। यदि तीन गेंदों को यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है, तो 1 लाल और 2 सफेद गेंदों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए

हल :-

6 में से 1 लाल गेंद निकालने के तरीकों की संख्या = ${}^6C_1$

4 में से 2 सफेद गेंद निकालने के तरीकों की संख्या = ${}^4C_2$

18 में से 3 गेंदों को निकालने के तरीकों की संख्या = ${}^{18}C_3$

आवश्यक प्रायिकता = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}}$

$= \frac{{}^6C_1 \times {}^4C_2}{{}^{18}C_3} = \frac{3}{68}$

याद रखने योग्य कुछ मुख्य बिंदु :-

a) किसी घटना के घटित होने और किसी घटना के घटित न होने की प्रायिकता का योग 1 के बराबर होता है ⇒ P(A) + P(A') = 1.

b) किसी असंभव घटना की प्रायिकता या किसी घटना के घटित न होने की प्रायिकता हमेशा 0 के बराबर होती है ⇒ P(ϕ) = 0.

c) किसी निश्चित घटना की प्रायिकता हमेशा 1 के बराबर होती है ⇒ P(A) = 1

d) किसी भी घटना के घटित होने की प्रायिकता सदैव 0 और 1 के बीच होती है ⇒ 0 < P(A) < 1

@apna_pdf

माध्य, माध्यिका और बहुलक

माध्य

माध्य दी गई संख्याओं का औसत है और इसकी गणना दी गई संख्याओं के योग को संख्याओं की कुल संख्या से विभाजित करके की जाती है। प्रतीक $\overline{X}$ माध्य को दर्शाता है।

माध्य $(\overline{X}) = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ...X_n}{n} = \frac{\Sigma X}{n}$

जहां n प्रतिदर्श में मानों की कुल संख्या को दर्शाता है ।

उदाहरण :- 28, 21, 39, 33, 36, 23 का माध्य ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 05/09/2023 (3rd Shift)
(a) 30 (b) 32 (c) 26 (d) 28
हल :- माध्य $(\overline{X}) = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ...X_n}{n}$
$= \frac{28 + 21 + 39 + 33 + 36 + 23}{6} = \frac{180}{6} = 30$

आकड़ो के प्रकार

अपरिष्कृत या अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य :-

माना . $X_1 + X_2 + X_3 + ...X_n$ अवर्गीकृत आँकड़ों हैं
तो हम अंकगणितीय माध्य निकालने के लिए उपयोग करते हैं

माध्य $(\overline{X}) = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ...X_n}{n}$

उदाहरण :- संख्याओं 4, 8, 12, 16 और 20 का अंकगणितीय माध्य क्या है?
DDA ASO 20/09/2017 (Morning)
(a) 8 (b) 10 (c) 14 (d) 12
हल :- अंकगणितिय माध्य $= \frac{4 + 8 + 12 + 16 + 20}{5} = 12$

वर्गीकृत आँकड़े

जब हमें बड़े डेटा से निपटना होता है तो डेटा का समूहन एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इस जानकारी को एक चित्रलेख और सारणीबद्ध या बार ग्राफ़ का उपयोग करके भी प्रदर्शित किया जा सकता है। एक चर के अवलोकनों को समूहों में व्यवस्थित करके गठित डेटा, ताकि इन समूहों की आवृत्ति वितरण तालिका डेटा को सारांशित करने या विश्लेषण करने का एक सुविधाजनक तरीका प्रदान करती है।

असतत बारंबारता वितरण के लिए माध्य :-

$\overline{X} = \frac{\text{सभी अवलोकनों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

उदाहरण:- निम्नलिखित डेटा का माध्य ज्ञात कीजिये ?

x	19	21	23	25	27	29	31
f	13	15	16	18	16	15	13

RRB NTPC CBT - I 16/01/2021 (Morning)
(a) 20 (b) 30 (c) 28 (d) 25
हल :-

x_i	f_i	$f_i x_i$
19	13	247
21	15	315
23	16	368
25	18	450
27	16	432
29	15	435
31	13	403
	$f_i = 106$	$f_i x_i = 2650$

$f_i = 106$ $f_i x_i = 2650$
माध्य $= \frac{2650}{106} = 25$

माध्यिका

जब डेटा को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है, तो माध्यिका को मध्यतम प्रेक्षणों के मान के रूप में परिभाषित किया जाता है। इसे M द्वारा दर्शाया गया है। दूसरे शब्दों में, डेटा में अवलोकन के मूल्यों का 50% माध्यिका से ऊपर है और 50% अवलोकनों का मूल्य माध्यिका से कम है।

अपरिष्कृत डेटा के लिए माध्यिका

n प्रेक्षणों के लिए $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ माध्यिका इस प्रकार पाई जाती है:
⇒ यदि n विषम है तो सूत्र का प्रयोग करें
माध्यिका $= (\frac{n+1}{2})^{th}$ प्रेक्षण का मान
जहाँ, n = प्रेक्षणों की कुल संख्या

उदाहरण :- यदि हमारे पास 15 प्रेक्षण हैं, तो $(\frac{15+1}{2})^{th}$ यानी 8वें प्रेक्षण का मान ठीक केंद्रीय मान होगा, जिसे माध्यिका कहते हैं।

⇒ यदि n सम है तो सूत्र का प्रयोग करें
माध्यिका $= \frac{(\frac{n}{2})^{\text{वा}} \text{ पद} + (\frac{n}{2}+1)^{\text{वा}} \text{ पद}}{2}$

उदाहरण :- डेटा का माध्यिका ज्ञात कीजिए
11, 16, 33, 15, 51, 18, 71, 75, 22, 17.
RRC Group D 17/08/2022 (Afternoon)
(a) 18 (b) 24 (c) 20 (d) 22
हल :- आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर
11, 15, 16, 17, 18, 22, 33, 51, 71, 75
माध्यिका $= \frac{(\frac{10}{2}) \text{ वाँ पद} + (\frac{10}{2}+1) \text{ वाँ पद}}{2}$
$\frac{(5)\text{वाँ पद} + (6)\text{वाँ पद}}{2} = \frac{18 + 22}{2} = 20$

असतत बारंबारता वितरण के लिए माध्यिका :- मान लीजिए $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ आवृत्ति $f_1, f_2, f_3, ..., f_k$ वाले चर के क्रमशः मान हैं।
एक आवृति वितरण आम तौर पर आरोही क्रम में व्यवस्थित प्रेक्षण को दर्शाता है। हम एक बारंबारता वितरण के लिए माध्यिका ज्ञात करने के लिए संचयी आवृत्तियों का उपयोग करते हैं, जहां प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है ।

माध्यिका $M = (\frac{n+1}{2})^{th}$ वें प्रेक्षण का मान
जहाँ, n = प्रेक्षणों की कुल संख्या

उदाहरण:- नीचे दिए गए आंकड़ों में छक्कों की संख्या तथा उन्हें जड़ने

@apna_pdf

वाले बल्लेबाजों की संख्या को दिखाया गया है।

छक्कों की संख्या	बल्लेबाजों की संख्या
1	2
2	3
3	1
4	3
5	2

छक्कों की संख्या की माध्यिका(Median) कितनी है ?
SSC MTS 06/08/2019 (Morning)
(a) 3 (b) 5 (c) 4 (d) 4.5
हल :-

छक्कों की संख्या(x_i)	बल्लेबाजों की संख्या (f_i)	संचयी बारंबारता (cf)
1	2	2
2	3	2 + 3 = 5
3	1	5 + 1 = 6
4	3	6 + 3 = 9
5	2	9 + 2 = 11
	संचयी माध्य = $\frac{11}{2}$ = 5.5	

चूंकि, 5.5 छठे संचयी आवृत्ति क्षेत्र में स्थित है। अत: छक्कों की माध्यिका 3 होगी।

निरंतर बारंबारता वितरण के लिए माध्यिका :-

एक निरंतर आवृत्ति चर के मानों को वर्ग अंतरालों के रूप में देती है और उन्हें आम तौर पर आरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। ऐसे मामलों में, हम माध्यिका ज्ञात करने के लिए संचयी आवृत्तियों का उपयोग करते हैं। ये संचयी बारंबारताएँ माध्यिका वाला वर्ग प्रदर्शित करेंगी। इसके लिए हम माध्यिका वर्ग

= वह वर्ग लेते हैं जिसमें $(\frac{n}{2})^{th}$ प्रेक्षण होते हैं

जहाँ, n = प्रेक्षणों की कुल संख्या

माध्यिका M = $L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$

जहाँ, L = माध्यिका वर्ग का निचला सीमा बिंदु
cf = माध्यिका वर्ग से पहले वर्ग की संचयी बारंबारता
f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता
c = माध्यिका वर्ग की लंबाई
नोट : जब कोई पूर्व वर्ग न हो तो उस स्थिति में cf = 0

उदाहरण :- दिए गए बारंबारता बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 10	8
10 - 20	7
20 - 30	9
30 - 40	12
40 - 50	11

RRC Group D 26/09/2022 (Evening)
(a) $\frac{215}{9}$ (b) $\frac{85}{3}$ (c) $\frac{265}{9}$ (d) $\frac{88}{3}$
हल :-

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0 - 10	8	8
10 - 20	7	15
20 - 30	9	24
30 - 40	12	36
40 - 50	11	47

$\frac{N}{2} = \frac{47}{2} = 23.5$
माध्यिका वर्ग = 20 - 30
माध्यिका $= l + \frac{\frac{N}{2} - CF}{f} \times h = 20 + \frac{23.5 - 15}{9} \times 10 = \frac{265}{9}$

बहुलक

वह मान जो दिए गए डेटा में अधिकतम बारंबारता या अधिकतम आवृत्ति के साथ आने वाला मान बहुलक कहलाता है। इसे M_0 द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण :- दिए गए आँकड़ों 4, 4, 9, 9, 9, 5, 5, 5, 5, 5 का बहुलक 5 है, क्योंकि 5 को अधिकतम बार दोहराया जाता है।

अपरिष्कृत डेटा और असतत आवृत्ति वितरण के लिए बहुलक:-

इन स्थितियों में बहुलक केवल निरीक्षण द्वारा पाया जा सकता है। हम बहुलक को उन प्रेक्षणों के बीच मान के रूप में प्राप्त कर सकते हैं जिन्हें अधिकतम बार दोहराया जाता है या जिसकी बारंबारता अधिकतम होती है।

सतत बारंबारता वितरण के लिए बहुलक :-

अधिकतम बारंबारता वाले वर्ग को बारंबारता बंटन का बहुलक वर्ग कहा जाता है।

बहुलक $M_0 = L + \{\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\} \times h$

जहाँ, L = बहुलक वर्ग की निचली सीमा
f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता
f_0 = बहुलक वर्ग से पहले की कक्षा की बारंबारता
f_2 = बहुलक वर्ग के उत्तरवर्ती वर्ग की बारंबारता
h = बहुलक वर्ग की वर्ग लंबाई

नोट : उपरोक्त सूत्र का उपयोग केवल तभी किया जा सकता है जब वितरण में समान वर्ग लंबाई के वर्ग हों। इसके अलावा, सूत्र का उपयोग केवल उन स्थितियों में किया जा सकता है जहां अधिकतम आवृत्ति केवल एक वर्ग के लिए होती है।

उदाहरण :- दिए गए बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए (दो दशमलव स्थान तक पूर्णांकित)।

वर्ग अंतराल	5 -10	10 -15	15 -20	20 -25	25 - 30	30 - 35
बारंबरता	8	7	6	9	11	10

SSC CGL Tier II (02/03/2023)
(a) 35.25 (b) 40.25 (c) 30.33 (d) 28.33
हल :-

वर्ग अंतराल	5 -10	10 -15	15 -20	20 -25	25 - 30	30 - 35
बारंबता	8	7	6	9	11	10

बहुलक $M_0 = L + \{\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\} \times h$

जहाँ, L = बहुलक वर्ग की निचली सीमा
f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता
f_0 = बहुलक वर्ग से पहले की कक्षा की बारंबारता
f_2 = बहुलक वर्ग के उत्तरवर्ती वर्ग की बारंबारता
h = बहुलक वर्ग की वर्ग लंबाई
सूत्र से,

बहुलक = $25 + \{\frac{11 - 9}{2(11) - 9 - 10}\} \times 5$

$= 25 + \{\frac{2}{22 - 19}\} \times 5 = 25 + \frac{10}{3} = \frac{85}{3} = 28.33$

@apna-pdf

माध्य, बहुलक और माध्यिका के बीच संबंध :-

बहुलक = 3 (माध्यिका) – 2 (माध्य)

यह संकेत चिन्ह में इस प्रकार लिखा गया है: $:M_0 = 3M - 2\overline{X}$

उदाहरण :- एक नमूने के आंकड़ों का माध्य = 60 और माध्यिका = 48 है तो इस बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए है :

SSC CGL Tier II (06/03/2023)

(a) 18 (b) 48 (c) 36 (d) 24

हल :- बहुलक = 3 माध्यिका – 2 माध्य

बहुलक = 3 × 48 – 2 × 60

बहुलक = 24

परिसर

परिसर वितरण के दो चरम अवलोकनों के बीच का अंतर है।

उदाहरण के लिए : यदि A और B किसी वितरण में प्रेक्षणों के क्रमशः सबसे बड़े और सबसे छोटे मान हैं, तो इसका परिसर A – B है।

परिसर = उच्चतम प्रेक्षण – निम्नतम प्रेक्षण

उदाहरण :- दिए गए आँकड़ों के परिसर ज्ञात करो ?

11, 16, 14, 7, 11, 23, 10, 30, 20, 33, 19, 12, 17, 14

(a) 26 (b) 25 (c) 24 (d) 19

हल :- 11, 16, 14, 7, 11, 23, 10, 30, 20, 33, 19, 12, 17, 14

आँकड़ों के परिसर = अधिकतम पद – न्यूनतम पद

= 33 – 7 = 26

विचरण

विचरण एक सांख्यिकीय माप है जिसका उपयोग डेटा मानों और माध्य के बीच औसत वर्ग अंतर के आकलन के लिए किया जाता है ।

$$\text{विचरण}(\sigma^2) = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$$

$\overline{x}$, जहाँ आकड़ो का माध्य प्रदर्शित करता है ।

$x_i - \overline{x}$ = डेटा सेट में प्रत्येक मान के अंतर की गणना करें ।

उदाहरण :- निम्नलिखित आकड़ो का मानक विचलन ज्ञात करें ।

(दो दशमलव स्थान तक पूर्णांकित)

5, 3, 4, 7

SSC CGL Tier II (03/03/2023)

(a) 1.48 (b) 3.21 (c) 4.12 (d) 2.45

हल :- आंकड़ों का माध्य = $\frac{5+3+4+7}{4}$ = 4.75

माध्य से विचलन = 0.25 , - 1.75 , - 0.75 और 2.25

उनका वर्ग = 0.0625 , 3.0625 , 0.5625 और 5.0625

अब , विचरण = $\frac{\Sigma_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$

= $\frac{0.0625 + 3.0625 + 0.5625 + 5.0625}{4}$ = 2.1875

मानक विचलन= $\sqrt{\text{विचरण}} \Rightarrow \sqrt{2.1875}$ = 1.48

मानक विचलन

यदि σ^2 प्रसरण है, तो σ को मानक विचलन कहा जाता है।

$$\text{मानक विचलन} = \sqrt{\text{विचरण}} = \sqrt{\frac{\Sigma_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$$

उदाहरण :- यदि 5 मानों का प्रसरण (variance) 0.81 है, तो इसका मानक विचलन क्या है ?

SSC MTS 26/10/2021 (Morning)

(a) 0.09 (b) 0.9 (c) 2.7 (d) .027

हल :- मानक विचलन = $\sqrt{\text{विचरण}}$ = $\sqrt{0.81}$ = 0.9

उदाहरण :- निम्नलिखित डेटा के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

5, 8, 10, 11, 16

हल :- $\overline{x} = \frac{5+8+10+11+16}{5} = \frac{50}{5}$ = 10

$(x_i - \overline{x})$ का मान निकालने पर हमे क्रमशः प्राप्त होते है ।

10 - 5 = 5, 10 - 8 = 2 , 10 - 10 = 0, 10 - 11 = - 1, 10 - 16 = - 6

तब विचरण का सूत्र प्रयोग करते है ।

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$$

$$= \frac{5^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-6)^2}{5} = \frac{66}{5}$$

मानक विचलन = $\sqrt{\text{विचरण}}$ = $\sqrt{\frac{66}{5}}$ = $\sqrt{13.2}$

विचरण गुणांक

इसे मानक विचलन और माध्य के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जाता है। भिन्नता का गुणांक एक आयामहीन मात्रा है और आमतौर पर इसे प्रतिशत के रूप में दिया जाता है।

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$$

उदाहरण :- यदि माध्य 25 है और मानक विचलन 5 है, तो भिन्नता का गुणांक क्या होगा ?

RRB NTPC CBT - I 07/01/2021 (Evening)

(a) 20% (b) 48% (c) 60% (d) 27%

हल :- गुणांक का परिवर्तन = $\frac{5}{25} \times 100 = 20\%$

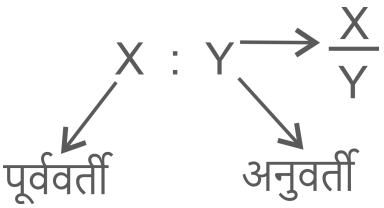
@apna_pdf

अनुपात - समानुपात

अनुपात

अनुपात दो मात्राओं की तुलना है जो पहली मात्रा को दूसरी मात्रा से विभाजित करके प्राप्त किया जाता है।

यानी x : y को $\frac{x}{y}$ के रूप में भी लिखा जा सकता है जहां $y \neq 0$ है ।



*** अनुपात सदैव समान मात्राओं के बीच होता है**

अनुपात के प्रकार

मिश्रित अनुपात :- माना $x : y$ और $a : b$ दो अनुपात हैं तो मिश्रित अनुपात $xa : yb$ है

वर्गानुपात (square) :- x : y का वर्गानुपात $x^2 : y^2$ होगा।

वर्गमूलानुपात(square root):- x : y का वर्गमूलानुपात $\sqrt{x} : \sqrt{y}$ होगा।

घनानुपात (cube) :- x : y का घनानुपात $x^3 : y^3$ होगा।

घनमूलानुपात(cube root) :- x : y का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{y}$ होगा।

व्युत्क्रम अनुपात(Inverse Ratio) :- x : y का व्युत्क्रम अनुपात y : x होगा।

यौगिक अनुपात(Compound Ratio) :- यदि दो या दो से अधिक अनुपात दिए जाते हैं, तो एक के पूर्ववर्ती को दूसरे के पूर्ववर्ती से गुणा किया जाता है और संबंधित अनुवर्त्ती भी गुणा किया जाता है।

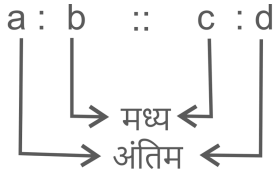
यदि a : b, c : d और e : f तीन अनुपात हैं, तो उनका यौगिक अनुपात $\frac{ace}{bdf}$ होगा।

समानुपात

दो समतुल्य अनुपात सदैव अनुपात में होते हैं।

यानी यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ है तो a,b,c,d अनुपात में हैं और इस प्रकार लिखे गए हैं

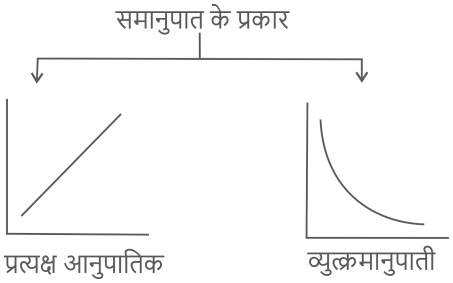
a : b :: c : d



अंतिम का गुडनखंड = मध्य का गुडनखंड

a × d = b × c

समानुपात के प्रकार



प्रत्यक्ष आनुपातिक (Directly proportional): यदि एक मात्रा बढ़ती है, तो दूसरी मात्रा भी बढ़ती है और इसके विपरीत भी।

i.e. यदि $x = ky$ जहां k अचर है तो हम कह सकते हैं कि x , y के प्रत्यक्ष आनुपातिक है।

व्युत्क्रमानुपाती (Inversely proportional): यदि एक मात्रा बढ़ती है, तो दूसरी मात्रा घटती हैऔर इसके विपरीत भी

i.e. यानी यदि $x = \frac{k}{y}$ और k अचर है तो हम कह सकते हैं कि x, y के व्युत्क्रमानुपाती है।

उदाहरण:- A, B के धनात्मक वर्गमूल के अनुक्रमानुपाती है, और C के घन के व्युत्क्रमानुपाती है। यदि B = 27 और C = 2 होने पर A = 15 है, तो A = 9 और C = 2 होने पर, B ज्ञात कीजिए ।

SSC CGL 05/12/2022 (2nd Shift)

(a) $\frac{281}{42}$ (b) $\frac{243}{25}$ (c) $\frac{264}{37}$ (d) $\frac{275}{51}$

हल:- $A \propto \sqrt{B} \propto \frac{1}{C^3}$

$A = \frac{k \times \sqrt{B}}{c^3} \Rightarrow 15 = \frac{k \times \sqrt{27}}{2^3}$

$k = \frac{120}{3\sqrt{3}}$ .....समीकरण.(1)

फिर से , $A = \frac{k \times \sqrt{B}}{c^3} \Rightarrow 9 = \frac{120 \times \sqrt{B}}{3\sqrt{3} \times 2^3}$

$\sqrt{B} = \frac{9\sqrt{3} \times 8}{40} \Rightarrow B = \frac{243}{25}$

कुछ परिणाम

a) यदि ad = bc, तो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

b) यदि ad > bc, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

c) यदि ad < bc, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

d) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

e) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ या $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

f) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ तो $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c-e}{d-f} = \frac{a-e}{b-f}$

g) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ तो $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c+e}{d+f}$

उदाहरण :- यदि a : b = c : d = e : f = g : h = 1 : 3 , तो निम्नलिखित का मान क्या होगा:

(pa + qc + re + sg) : (pb + qd + rf + sh)

@apna_pdf

RRB NTPC CBT - I 05/04/2021 (Evening)
(a) 1 : 5 (b) 1 : 2 (c) 1 : 3 (d) 1 : 4
हल :- दिया गया है ,
a : b = c : d = e : f = g : h = 1 : 3
प्रश्न के अनुसार ,
(pa + qc + re + sg) : (pb + qd + rf + sh)
(p × 1 + q ×1 + r × 1 + s ×1) : (p × 3 + q× 3 + r × 3 + s × 3)
(p + q + r + s) : 3 (p + q + r + s) = 1 : 3

h) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{f}{g}$ = K, जहां K नियतांक (constant) है।
तब, K = $\frac{a+c+e+f}{b+d+f+g}$

i) निरंतर अनुपात के लिए,
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k\ , a = bk,\ c = dk$

j) मध्यानुपाती (Mean Proportion) :-
दो संख्याओं, a और b का मध्यनुपाती $\sqrt{ab}$ होता है।

उदाहरण:- $(3 + \sqrt{5})$ और $(15 - \sqrt{125})$ के बीच माध्यानुपात क्या है ?
Selection Post 27/06/2023 (2nd Shift)
(a) $3\sqrt{5}$ (b) $5\sqrt{5}$ (c) $9\sqrt{5}$ (d) $2\sqrt{5}$
हल:-
मध्यानुपात = $\sqrt{(3 + \sqrt{5})(15 - \sqrt{125})}$
= $\sqrt{(3 + \sqrt{5})5(3 - \sqrt{5})}$
= $\sqrt{5(9 - 5)} = 2\sqrt{5}$

k) 3rd समानुपाती:- a और b का तीसरा समानुपाती अर्थात ⇒ a : b :: b : x
जहाँ, $x = \frac{b^2}{a}$

उदाहरण :- 15 और 120 का तृतीय समानुपाती ज्ञात कीजिए।
SSC CHSL 04/08/2023 (4th Shift)
(a) 880 (b) 960 (c) 900 (d) - 860
हल :- तृतीय समानुपाती = $\frac{120 \times 120}{15}$ = 960

l) चौथा समानुपाती:- a, b और c का चौथा समानुपात अर्थात a : b :: c : x
⇒ जहाँ, $x = \frac{b \times c}{a}$

उदाहरण :- 12^{35}, 3^{12} और 4^{12} का चतुर्थ समानुपाती ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 14/09/2023 (3rd Shift)
(a) 12^{-23} (b) 3^{24} (c) 12^{-11} (d) 4^{24}
हल :- चतुर्थ आनुपातिक = $\frac{3^{12} \times 4^{12}}{12^{35}} = \frac{3^{12} \times 4^{12}}{3^{35} \times 4^{35}}$
= $3^{-23} \times 4^{-23} = (3 \times 4)^{-23} = 12^{-23}$

m) योगांतरानुपात नियम (Componendo and Dividendo rule):-
यदि a : b :: c : d , तो ⇒ $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

1) यदि अनुपात के अंश और हर को एक ही संख्या से गुणा और विभाजित किया जाता है, तो अनुपात अपरिवर्तित रहता है,
i.e. $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$
अनुपात केवल पैमाने में परिवर्तन से स्वतंत्र है न कि मूल से।

2) यदि n असमान भिन्नों की संख्या है जैसे $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}$..... $\frac{a_n}{b_n}$ तो $(a_1+a_2+a_3+..a_n)$ और $(b_1+b_2+b_3..b_n)$ का अनुपात इन भिन्नों के निम्नतम और उच्चतम मानों के बीच स्थित है।

उदाहरण :- तीन असमान भिन्न $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ हैं। अतः अनुपात है =
(1 + 2 + 4) : (2 + 3 + 7) = 7 : 12
इन भिन्नों में, सबसे छोटी भिन्न $\frac{1}{2}$ है और उच्चतम भिन्न $\frac{2}{3}$ है, इसलिए,
अभीष्ट मान $\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{3}$ के बीच है।

3) यदि किसी राशि A को x और y के बीच m : n के अनुपात में विभाजित किया जाता है तब
$x = \frac{m}{m+n} \times A$ और $y = \frac{n}{m+n} \times A$

उदाहरण :- दो संख्याओं का अनुपात 5 : 7 है। यदि इन संख्याओं का योगफल 108 है, तो छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।
RRC Group D 30/09/2022 (Afternoon)
(a) 42 (b) 47 (c) 36 (d) 45
हल :- छोटी संख्या = $\frac{5}{5+7} \times 108 = 45$

4) यदि x और y की राशि का अनुपात m : n है और उनके हिस्से का अंतर A है तो
$x = \frac{m}{m-n} \times A$ और $y = \frac{n}{m-n} \times A$

उदाहरण :- दो संख्याएं 5 : 3 के अनुपात में हैं, और इन दोनों संख्याओं के बीच का अंतर 34 है। दोनों संख्याओं में से छोटी संख्या ज्ञात करें।
SSC CPO 03/10/2023 (1st Shift)
(a) 68 (b) 34 (c) 51 (d) 85
हल :- छोटी संख्या = $\frac{3}{5-3} \times 34 = 51$

5) यदि aA = bB = cC, जहां a, b, c नियतांक (constants) हैं और A, B, C चर (variables) हैं। तो A : B : C का अनुपात = b×c : c×a : a×b
या
यदि aA = bB = cC = dD, जहां a,b,c,d नियतांक (constants) हैं और A, B, C, D चर (variables) हैं तो A : B : C : D का अनुपात = b × c × d : c × a × d : a × b × d : a × b × c.

उदाहरण:- यदि 2P = 3Q = 4R = 5S है, तो P : Q : R : S ज्ञात कीजिए।
Selection Post 28/06/2023 (3rd Shift)
(a) 30 : 20 : 12 : 15 (b) 12 : 20 : 30 : 15
(c) 20 : 30 : 15 : 12 (d) 30 : 20 : 15 : 12
हल:- 2P : 3Q : 4R : 5S = k
P : Q : R : S = 3 × 4 × 5 : 4 × 5 × 2 : 2 × 3 × 5 : 2 × 3 × 4.
P : Q : R : S = 60 : 40 : 30 : 24 = 30 : 20 : 15 : 12

@apna_pdf

Type - 1

(a) दो या तीन अनुपात दिए गए हों :

उदाहरण :- a : b = 3 : 4 , b : c = 6 : 7, तो a : b : c = ?
हल :- उभयनिष्ठ निकायों का LCM अर्थात b = (4, 6) =12
a : b = 3 : 4) × 3 = 9 : 12
b : c = 6 : 7) × 2 = 12 : 14
अतः a : b : c = 9 : 12 : 14
Exam hall Approach:-

3 : 4
↓ ↗ ↓
6 : 7

3 × 6 : 6 × 4 : 4 × 7 = 18 : 24 : 28
a : b : c = 9 : 12 : 14

(b) तीन से अधिक अनुपात दिए गए हों :

उदाहरण :- यदि a : b = 2 : 3, b : c = 4 : 5, c : d = 6 : 7, d : e = 1 : 2 तो a : b : c : d : e = ?
हल:-
Exam Hall approach:-

a : b : c : d : e
2 : 3 ③ ③ ③
④ 4 : 5 ⑤ ⑤
⑥ ⑥ 6 : 7 ⑦
① ① ① 1 : 2
48 : 72 : 90 : 105 : 210

उदाहरण:- 12000 रुपये की राशि को A, B, C और D के बीच इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि A और B के हिस्से का अनुपात 8 : 9 है, B और C के हिस्से का अनुपात 2 : 3 है और C : D के हिस्से का अनुपात 9 : 13 है। B और D के हिस्सों में क्या अंतर है ?
SSC CPO 13/12/2019 (Morning)
(a) Rs. 1320 (b) Rs. 2400
(c) Rs. 2520 (d) Rs. 2760
हल :-
अनुपात → A : B : C : D
8 : 9 : **9 : 9**
2 : 2 : 3 : **3**
9 : **9** : 9 : 13
---
16 : 18 : 27 : 39
अनुपात जोड़ने पर, = 100 इकाई
100 इकाई = 12000 , 1 इकाई = 120
B और D के हिस्सों के बीच का अंतर = 21× 120 = Rs 2520

उदाहरण :- यदि P : Q = 3 : 4 और Q : R = 4 : 7 हैं, तो (P + Q) : (Q + R) : (R + P) का मान ज्ञात कीजिए।
SSC CGL Tier II (26/10/2023)
(a) 11 : 4 : 7 (b) 10 : 3 : 11
(c) 3 : 4 : 7 (d) 7 : 11 : 10
हल :- P : Q : R = 3 : 4 : 7
अतः , (P + Q) : (Q + R) : (R + P) = (3 + 4) : (4 + 7) : (7 + 3)
= 7 : 11 : 10

Type - 2

उदाहरण:- यदि 52, 47, 20 और 19 में से प्रत्येक से x घटाया जाए, तो इस क्रम में प्राप्त संख्याएँ समानुपाती होती हैं। (x + 13) और (x - 8) के बीच माध्य आनुपातिक क्या है ?
SSC MTS 13/10/2021(Morning)
(a) 12 (b) 10 (c) 15 (d) 9
SSC MTS 13/10/2021 (Morning)
हल:- प्रश्न के अनुसार,
$\Rightarrow 52 - x : 47 - x :: 20 - x : 19 - x$
$\Rightarrow \frac{(52-x)}{(47-x)} = \frac{(20-x)}{(19-x)}$
$\Rightarrow (52 - x)(19 - x) = (47 - x)(20 - x)$
$\Rightarrow 988 - 71x + x^2 = 940 - 67x + x^2$
$\Rightarrow 48 = 4x \Rightarrow x = 12$
(x + 13) और (x - 8) के बीच आनुपातिक माध्य
$= \sqrt{(12 + 13)(12 - 8)} = \sqrt{100} = 10$

Exam Hall approach:-

1st 2nd 3rd 4th
52 47 20 19
अंतर 5 अंतर 1

x का प्रत्यक्ष मूल्य =
$\frac{5\times(\text{तीसरी या चौथी संख्या}) - 1\times(\text{पहली या दूसरी संख्या})}{5-1}$
$\Rightarrow x = \frac{100-52}{4} = \frac{48}{4} = 12$
अब,
माध्य आनुपातिक $= \sqrt{(x + 13) \times (x - 8)} = \sqrt{25 \times 4} = 5 \times 2 = 10$

Type - 3

जब कोई राशि/वस्तु दो या दो से अधिक भागों में बँटी हो

उदाहरण:- यदि 825 रुपये को $\frac{1}{3} : \frac{4}{9} : \frac{3}{4}$ के अनुपात में तीन भागों में विभाजित किया जाता है, तो पहला भाग होगा :
RRB NTPC CBT - I 08/03/2021 (Morning)
(a) Rs. 190 (b) Rs. 204
(c) Rs. 180 (d) Rs. 210
हल:- 825 रुपये को LCM(3,9,4) = 36 के अनुपात में तीन भागों में बांटा गया है
$\frac{1}{3} \times 36 : \frac{4}{9} \times 36 : \frac{3}{4} \times 36$
= 12 : 16 : 27 ;
तो पहला भाग = $825 \times \frac{12}{55} = 180$ रुपये

उदाहरण:- Rs. 43,120 को P, Q और R में इस प्रकार बांटा जाता है कि P का हिस्सा Q और R के कुल हिस्से का $\frac{4}{7}$ है और Q का हिस्सा P और R के कुल हिस्से का $\frac{2}{5}$ है। R का हिस्सा कितना है ?
SSC CHSL 21/03/2023 (3rd Shift)
(a) Rs.15120 (b) Rs.14220
(c) Rs.16400 (d) Rs.18050
हल:-
अनुपात →
P : Q + R = 4 : 7) × **7**
Q : P + R = 2 : 5) × **11**
P , Q , R की कुल राशि = 77 इकाई

@apna_pdf

और R की इकाई = 77 – (7 × 4 + 11 × 2)
= 27 इकाई
77 इकाई = ₹43120
(R)27 इकाई = $\frac{43120}{77}$ × 27 = ₹15120

Type - 4

सिक्को पर आधारित

जब सिक्कों या नोटों की संख्या पूछी गई हो :

उदाहरण:- एक बटुए में क्रमश: 2 : 5 : 3 के अनुपात में Rs. 1, Rs. 2 और Rs. 5 के सिक्के हैं। यदि बटुए में कुल Rs. 54 हैं, तो Rs. 5 के कितने सिक्के हैं?
SSC MTS 09/05/2023 (Afternoon)
(a) 20 (b) 10 (c) 4 (d) 6
हल:-
लागत → ₹ 1 : ₹ 2 : ₹ 5
अनुपात → $2x$: $5x$: $3x$

कुल राशि = $2x + 10x + 15x = 27x$
$27x$ = ₹ 54
₹ 5 के सिक्कों की संख्या ($3x$) = $\frac{54}{27x} \times 3x = 6$

जब कुल राशि पूछी गई हो :

उदाहरण:- एक बैग में ₹5, ₹10 और ₹20 मूल्य के सिक्के हैं। बैग में सिक्कों की कुल संख्या 240 है। यदि ₹5, ₹10, ₹20 मूल्य के सिक्कों की संख्या 2 : 3 : 5 के अनुपात में है, तो बैग में कुल कितनी धनराशि है?
SSC MTS 12/07/2022 (Afternoon)
(a) ₹3,540 (b) ₹4,600 (c) ₹4,620 (d) ₹3,360
हल:-
सिक्के का मूल्य → ₹5 : ₹10 : ₹20
सिक्के का अनुपात → 2x : 3x : 5x

मूल्य → 10x : 30x : 100x
10x = 240 ⇒ x = 24
अब थैले में कुल धनराशि
= 10x + 30x + 100x = 140x
= 140 × 24 = Rs 3360

Type - 5

जोड़ना या घटाना

संख्या में वृद्धि/कमी:

उदाहरण:- दो संख्याओं का अनुपात 2 : 7 है। यदि पहली संख्या में 14 की वृद्धि, और दूसरी संख्या में 6 की कमी की जाती है, तो उनका अनुपात 4 : 3 हो जाता है। दोनों मूल संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए
RRC Group D 02/09/2022 (Morning)
(a) 45 (b) 27 (c) 36 (d) 18
हल :- माना संख्याएँ $2x$ और $7x$ हैं।

$$\frac{2x+14}{7x-6} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow 6x + 42 = 28x - 24$
$\Rightarrow 28x - 6x = 42 + 24$
$\Rightarrow 22x = 66 \Rightarrow x = 3$

संख्याओं का योग = $2x + 7x$ = 6 + 21 = 27

जनसंख्या में वृद्धि/कमी:-

उदाहरण:- एक शहर की आबादी में लगातार दो वर्षों में 10% और 20% की वृद्धि हुई, किन्तु तीसरे वर्ष में इसमें 25% की कमी हुई। तीसरे वर्ष में जनसंख्या और 3 वर्ष पूर्व की जनसंख्या का अनुपात ज्ञात कीजिए ।
RRB JE 01/06/2019 (Morning)
(a) 1 : 1 (b) 2 : 1 (c) 99 : 100 (d) 100 : 99
हल:-

	प्रारंभिक		**अंतिम**
प्रथम वर्ष की जनसंख्या →	10	:	11
दूसरे वर्ष की जनसंख्या →	5	:	6
तीसरे वर्ष की जनसंख्या →	4	:	3

अंतिम वर्ष 100 : 99
3 वर्ष बाद और पहले जनसंख्या का अनुपात = 99 : 100

Type - 6

आय और व्यय

आय = व्यय + बचत	
व्यय ↑ तब बचत↓	**व्यय ↓ तब बचत ↑**

उदाहरण:- यदि 2 कंपनियों की आय का अनुपात 7 : 5 है, जबकि यह पाया गया कि व्यय का अनुपात 5 : 3 है, यदि दोनों कंपनियां प्रत्येक महीने में 8,000 रुपये बचाती हैं। दोनों कंपनियों की मासिक आय का योग ज्ञात कीजिये?
SBI Clerk Pre 19/11/2022 (2nd Shift)
(a) रु. 50000 (b) रु. 48000 (c) रु. 60000
(d) रु. 65000 (e) रु. 72000
हल:-

अनुपात ⟶	कंपनी 1		कंपनी 2
आय ⟶	7	:	5
व्यय ⟶	5	:	3
बचत ⟶	8000	:	8000

अनुपात (25 - 21) इकाई = 40000 - 24000
⇒ 4 इकाई = 16000 ⇒ 1 इकाई = 4000
दोनों कंपनियों की आय का योग
12 इकाई = 4000 ×12 = ₹ 48000

उदाहरण:- एक व्यक्ति का व्यय और बचत 4 : 3 के अनुपात में है। उसकी बचत उसकी आय के $\frac{1}{5}$ के बराबर बढ़ जाती है और आय समान रहती है। उसके व्यय और बचत का नया अनुपात क्या है?
SSC CHSL 10/03/2023 (1st Shift)
(a) 12 : 17 (b) 14 : 17
(c) 13 : 22 (d) 15 : 13
हल:- प्रश्न के अनुसार ,

अनुपात →	आय	:	व्यय	:	बचत
प्रारंभिक →	7	:	4	:	3
परिवर्तन →			- 1.4		+ 1.4
अंतिम →	7	:	2.6	:	4.4

उसकी बचत उसकी कुल आय का $\frac{1}{5}$वां हिस्सा बढ़ जाती है और आय समान रहती है
इसलिए, उसके व्यय और बचत का नया अनुपात
= 2.6 : 4.4 = 13 : 22

@apnc_pdf

उदाहरण:- वैदिक की मासिक आय और व्यय के बीच का अनुपात 8 : 5 है। यदि उसकी आय में 20% की वृद्धि होती है और उसके व्यय में 30% की वृद्धि होती है, तो उसकी मासिक बचत में प्रतिशत वृद्धि या कमी ज्ञात कीजिए।
SSC CGL 14/07/2023 (4th shift)
(a) $5\frac{2}{3}$% वृद्धि (b) $5\frac{2}{3}$% कमी (c) $3\frac{1}{3}$% वृद्धि (d) $3\frac{1}{3}$% कमी
हल:-

अनुपात →	आय	=	व्यय	+	बचत
प्रारंभिक →	80	=	50	+	30
अंतिम →	**96**	=	**65**	+	31

बचत में परिवर्तन % = $\frac{1}{30} \times 100 = 3\frac{1}{3}$% वृद्धि

उदाहरण:- पिछले वर्ष A और B की आय का अनुपात 4 : 3 था। पिछले वर्ष और वर्तमान वर्ष में उनकी व्यक्तिगत आय का अनुपात क्रमशः 3 : 4 और 5 : 6 है। यदि वर्तमान वर्ष में उनकी कुल आय ₹24.12 लाख है, तो पिछले वर्ष में A की आय (₹ लाख में) और वर्तमान वर्ष में B की आय का योग है:
SSC CGL Tier II (29/01/2022)
(a) 20.52 (b) 10.98 (c) 22.17 (d) 21.28
हल:-
अनुपात → पिछले वर्ष की आय
A : B = 4 : 3
अब ,

	पिछला वर्ष	:	वर्तमान वर्ष
A →	**×4 × 5** (3	:	4
B →	**×3 × 3** (5	:	6

	पिछला वर्ष	:	वर्तमान वर्ष
A →	**60**	:	80
B →	**45**	:	54

प्रश्न के अनुसार ,
(80 + 54) इकाई = 24.12 लाख
1 इकाई = 0.18 लाख
A की पिछले वर्ष की आय + B की वर्तमान वर्ष की आय = (60 + 54) इकाई = 114 इकाई
114 इकाई = 114 × 0.18 = 20.52 लाख

Type - 7

आयु

आयु के दिए गए अनुपात में आयु का योग:-

उदाहरण:- मंजीत और अनिरुद्ध की वर्तमान आयु का अनुपात 3 : 4 है। 27 वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात 9 : 11 होगा। अनिरुद्ध की वर्तमान आयु क्या होगी?
IBPS PO Pre 15/10/2022 (2nd Shift)
(a) 36 वर्ष (b) 45 वर्ष (c) 54 वर्ष (d) 72 वर्ष (e) 41 वर्ष
हल:- प्रश्न के अनुसार,
माना मंजीत और अनिरुद्ध की वर्तमान आयु $3x$ और $4x$ है
$\frac{3x+27}{4x+27} = \frac{9}{11} \Rightarrow 33x + 297 = 36x + 243$
$\Rightarrow x = \frac{297-243}{3} = 18$
अतः अनिरुद्ध की वर्तमान आयु = 18 × 4 = 72 वर्ष होगी
Exam Hall approach :-

	मंजीत		अनिरुद्ध
वर्तमान अनुपात →	3	:	$4)_{\times 2}$
	+27		
नया अनुपात →	9	:	$11)_{\times 1}$

कुल परिवर्तन ($3x$) = 27 ⇒ x = 9
अब, अनिरुद्ध की वर्तमान आयु = 8 × 9 = 72 वर्ष

आयु के दिए गए अनुपात में आयु का घटाव:-

उदाहरण:- वर्तमान में, A, B से 8 वर्ष छोटा है। यदि 4 वर्ष पहले, उनकी आयु 1 : 2 के अनुपात में थी, तो B की वर्तमान आयु (वर्षों में) क्या है?
SSC CGL 12/04/2022(Morning)
(a) 11 (b) 20 (c) 12 (d) 18
हल:- माना A और B की वर्तमान आयु क्रमशः a और b वर्ष है।
प्रश्न के अनुसार, ⇒ $\frac{a-4}{b-4} = \frac{1}{2}$
2a − 8 = b − 4 ⇒ 2a − b = 4 .....(1)
साथ ही, a = b − 8 ⇒ a − b = − 8 ....(2)
समीकरण (1) और (2) को हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं ; a = 12 और b = 20
अत: B की वर्तमान आयु = 20 वर्ष
नोट;- A और B के बीच उम्र का अंतर हमेशा समान होता है

	A		B	
	1	:	2	→ 1इकाई = 8 वर्ष
-4वर्ष	↑		↑	-4वर्ष
वर्तमान आयु :-	8 + 4	:	16 + 4	
	12	:	20	

आयु के दिए गए अनुपात में आयु का जोड़ और घटाव:-

उदाहरण:- एक पिता और उसके पुत्र की वर्तमान आयु का योग 94 वर्ष है। 8 वर्ष पहले उनकी क्रमशः आयु का अनुपात 2: 1 था। 10 वर्ष बाद पिता और पुत्र की आयु का अनुपात क्या होगा ?
SSC CHSL 17/03/2023 (4th Shift)
(a) 35 : 22 (b) 14 :13 (c) 25 : 18 (d) 16 :15
हल:- माना , पिता की वर्तमान आयु = x तथा पुत्र की आयु = y
x + y = 94 --------समीकरण (1)
(8 − x) = 2(8−y)
2y − x = 8 -------समीकरण (2)
समी (1) और समी (2) को जोड़ने पर; हम पाते हैं
y = 34 और x = 60
अभीष्ट अनुपात = 70 : 44 = 35 : 22

	F		S	
	2	:	1	→ 3इकाई = 78
-8वर्ष	↑		↑	-8वर्ष
वर्तमान आयु :-	52 + 8	:	26 + 8	
	+10 ↓		↓	
	70	:	44	
	35	:	22	

उदाहरण:-सात साल पहले, A और B की आयु का अनुपात 4 : 5 था। आठ साल बाद A और B की आयु का अनुपात 9 : 10 होगा। वर्षों में उनके वर्तमान आयु का योग क्या है।
SSC CPO 23/11/2020 (Morning)
(a) 41 (b) 82 (c) 32 (d) 56
हल:-

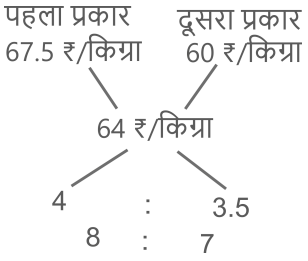
@apna_pdf

अनुपात A : B
-7 वर्ष ⇨ 4 : 5
+5 +5
+8 वर्ष ⇨ 9 : 10
प्रश्न के अनुसार ,
5 इकाई = 15 साल → 1 इकाई = 3 साल
उनकी वर्तमान आयु का योग →
(4 + 5) इकाई + 14 साल
= 9 × 3 + 14 = 41 साल

Type - 8

औसत

उदाहरण :- 64 रुपये प्रति किलोग्राम की औसत कीमत प्राप्त करने के लिए 67.5 रुपये प्रति किलोग्राम मूल्य वाले चावल को 60 रुपये प्रति किलोग्राम मूल्य वाले चावल के साथ किस अनुपात में मिलाया जाना चाहिए?
SSC CHSL Tier II (26/06/2023)
(a) 8 : 7 (b) 5 : 6 (c) 6 : 5 (d) 7 : 8
हल :- एलीगेशन विधि का उपयोग करना



Type - 9

जब वितरण गलत हो

उदाहरण:- ₹702 को राम, रमेश और नरेश के बीच गलती से $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$ के अनुपात में विभाजित करने के बजाय इसे 3 : 4 : 6 के अनुपात में विभाजित कर दिया गया था। सबसे अधिक किसने और कितना लाभ प्राप्त किया?
SSC CGL 02/12/2022 (1st Shift)
(a) राम ₹158 (b) रमेश ₹158
(c) नरेश ₹168 (d) राम ₹168
हल:-
राम : रमेश : नरेश
$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} \Rightarrow 4 : 3 : 2$
अनुपात → राम : रमेश : नरेश
प्रारंभिक → 4 : 3 : 2 = 9 इकाई ×13
अंतिम → 3 : 4 : 6 = 13 इकाई × 9
विभाजित धन समान होने पर इकाइयों को समान बनाएं
राम : रमेश : नरेश
52 : 39 : 26 = 117 इकाई
27 : 36 : 54 = 117 इकाई

- 25u - 3u + 28u
प्रश्न के अनुसार, 117 इकाई = 702 रु.
तब, 28 इकाई = 168 रु
स्पष्ट रूप से , नरेश को 168 रु और अधिक प्राप्त हुआ

क्षेत्रफल/आयतन का अनुपात

उदाहरण :- दो बेलनों की त्रिज्याएँ 2 :1 के अनुपात में हैं और उनकी ऊँचाई 5 : 2 के अनुपात में है। उनके आयतनों का अनुपात क्या होगा?
SSC CHSL Tier II (26/06/2023)
(a) 20 : 1 (b) 15 : 1 (c) 10 : 1 (d) 5 : 1
हल :- बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$
अनुपात → आरंभिक : अंतिम
(त्रिज्या)^2 → $(2)^2 : (1)^2$
ऊँचाई → 5 : 2

आयतन → 20 : 2 = 10 : 1

मिश्रित प्रश्न

उदाहरण :- 3 कप और 5 प्लेटों का मूल्य ₹1,080 है और 2 कप और 4 प्लेटों का मूल्य ₹840 है। एक कप के मूल्य और एक प्लेट के मूल्य का अनुपात ज्ञात कीजिये।
SSC CHSL 03/08/2023 (3rd Shift)
(a) 1 : 3 (b) 2 : 3 (c) 1 : 1 (d) 1 : 2
हल :-
3C + 5P = 1080 ₹ ... समीकरण (1)
2C + 4P = 840 ₹ ... समीकरण (2)

C + P = 240 ₹
⇒ 2C + 2P = 480 ₹ ...समीकरण(3)
समीकरण (3) और समीकरण (2) को हल करने पर , हमे प्राप्त होता है
2P = 360 ⇒ P = 180 ₹ और C = 60 ₹
आवश्यक अनुपात = 1 : 3

उदाहरण :- एक हीरे की कीमत उसके वजन के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है। एक 14 gm के हीरे की कीमत ₹2560 है। यह हीरा 5 : 9 के अनुपात में दो टुकड़ों में टूट जाता है। इसके टूटने के कारण कितने प्रतिशत की हानि हुई है? (दशमलव के दो स्थानों तक सही उत्तर दीजिए)
SSC CGL Tier II (08/08/2022)
(a) 53.47 प्रतिशत (b) 49.71 प्रतिशत
(c) 45.92 प्रतिशत (d) 55.41 प्रतिशत
हल :-
यह दिया गया है कि, कीमत $\propto$ वजन^2
हीरे का प्रारंभिक वजन = $(5 + 9)^2 = 14^2$
= 196 इकाई
टूटने के बाद हीरे का वजन = $5^2 + 9^2$
= 25 + 81 = 106 इकाई
हीरे के वजन में आवश्यक हानि प्रतिशत
$= \frac{196 - 106}{196} \times 100$
$= \frac{90}{196} \times 100 = 45.918 \sim 45.92\%$

उदाहरण :- एक स्कूल में, छात्रों की संख्या में से $\frac{5}{12}$ लड़कियाँ हैं और शेष लड़के हैं, लड़कों की संख्या में से $\frac{4}{7}$, 14 वर्ष से कम उम्र के हैं, और $\frac{2}{5}$ की संख्या में लड़कियाँ 14 वर्ष या 14 वर्ष से अधिक हैं। यदि 14 वर्ष से

@apna pdf

कम आयु के छात्रों की संख्या 1120 है, तो स्कूल में छात्रों की कुल संख्या है:
SSC CPO 25/11/2020 (Evening)
(a) 1820 (b) 1900 (c) 1920 (d) 1290
हल :-अनुपात → लड़के : लड़कियां = 7 : 5

14 साल से कम उम्र की लड़कियां $= 5 \times \frac{3}{5} = 3$

14 साल से कम उम्र के लड़के $= 7 \times \frac{4}{7} = 4$

प्रश्न के अनुसार ,
(3 + 4) = 7 इकाई = 1120
⇒ 1 इकाई = 160
कुल छात्र (7 + 5) = 12 × 160 = 1920

उदाहरण :- . एक आदमी ने 10 भौतिकी की किताबें और कुछ रसायन विज्ञान की किताबें मंगवाईं। एक रसायन विज्ञान की किताब की कीमत भौतिकी की किताब की कीमत से दोगुनी है। बिल तैयार करते समय क्लर्क ने गलती से भौतिकी और रसायन विज्ञान की किताबों की संख्या आपस में बदल दी, जिससे बिल $12\frac{1}{2}$% कम हो गया। मूल क्रम में, भौतिक विज्ञान की पुस्तकों की संख्या का रसायन विज्ञान की पुस्तकों की संख्या से अनुपात है:
SSC MTS 12/10/2021 (Evening)
(a) 3 : 5 (b) 3 : 4 (c) 4 : 5 (d) 2 : 3
हल :-
माना, रसायन विज्ञान की पुस्तकों की संख्या = x और माना, कि प्रत्येक भौतिकी पुस्तक और प्रत्येक रसायन विज्ञान की पुस्तक का मूल्य क्रमशः 1 और 2 है।
तो, कुल सही राशि = $10 \times 1 + x \times 2 = 10 + 2x$
कुल गलत राशि $= 10 \times 2 + x \times 1 = 20 + x$
प्रश्न के अनुसार,

$$12.5 = \frac{(10 + 2x) - (20 + x)}{10 + 2x} \times 100$$

$$\frac{1}{8} = \frac{(10 + 2x) - (20 + x)}{10 + 2x}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{x - 10}{10 + 2x} \Rightarrow 10 + 2x = 8x - 80$$

$6x = 90 \Rightarrow x = 15$
अतः अभीष्ट अनुपात = $10 : x = 10 : 15 = 2 : 3$

@apna_pdf

प्रतिशत

प्रतिशत एक संख्या या अनुपात है जिसे 100 के अंश के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण :- 20% का अर्थ ?

20% का अर्थ किसी मूल्य का $\frac{20}{100}$ होता है । इसके अलावा, आप देख सकते हैं ; $\frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2$ अर्थात किसी संख्या का 0.2 उस संख्या के 20% के समान है ।

प्रतिशत वास्तव में भिन्न लिखने का एक और तरीका है।

अर्थात $\frac{1}{5}$, 20% के समान है ।

प्रतिशत = $\frac{\text{मूल्य}}{\text{कुल मूल्य}} \times 100$

प्रमुख बिंदु

- प्रतिशत परिवर्तन = $\frac{\text{अंतिम मान} - \text{प्रारंभिक मान}}{\text{प्रारंभिक मान}} \times 100$
- यदि किसी उत्पाद की कीमत में a% की वृद्धि या कमी होती है, तो व्यय को समान रखने के लिए, खपत में प्रतिशत कमी की आवश्यकता = $[\{\frac{a}{(100 \pm a)}\} \times 100]$ % ('+' मूल्य वृद्धि के लिए और '-' मूल्य में कमी के लिए)
- यदि संख्या में पहले x% की वृद्धि की जाती है और फिर x% की कमी की जाती है, तब कुल परिणाम सदैव घटेगा और यह $(\frac{x^2}{100})$% के बराबर होता है। इसके विपरीत स्थिति में भी वही परिणाम प्राप्त होगा।

क्रमिक (Successive) प्रतिशत परिवर्तन :-

1. दो क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन : यदि संख्या में पहले a% की वृद्धि या कमी की जाती है और फिर b% की वृद्धि या कमी की जाती है, तो

प्रभावी प्रतिशत परिवर्तन = $[\pm\ a\ \pm\ b\ + \frac{(\pm a)\ (\pm b)}{100}]$ %

2. तीन क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन : यदि संख्या में पहले a%, फिर b% और फिर c% की वृद्धि की जाती है, तो

प्रभावी प्रतिशत परिवर्तन = $(a + b + c + \frac{ab + bc + ca}{100} + \frac{abc}{10000})$%

नोट :- यदि a = b = c तब ,

प्रभावी प्रतिशत परिवर्तन = $(3a + \frac{3a^2}{100} + \frac{a^3}{10000})$%

महत्वपूर्ण भिन्न और उनके समतुल्य प्रतिशत

भिन्न	प्रतिशत	दशमलव
1	100%	-
$\frac{1}{2}$	50%	0.5
$\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$%	33.33%
$\frac{1}{4}$	25%	0.25
$\frac{1}{5}$	20%	0.2
$\frac{1}{6}$	$16\frac{2}{3}$%	16.67%
$\frac{1}{7}$	$14\frac{2}{7}$%	14.28%
$\frac{1}{8}$	$12\frac{1}{2}$%	12.5%
$\frac{1}{9}$	$11\frac{1}{9}$%	11.11%
$\frac{1}{10}$	10%	0.1
$\frac{1}{11}$	$9\frac{1}{11}$%	9.09%
$\frac{1}{12}$	$8\frac{1}{3}$%	8.33%
$\frac{1}{13}$	$7\frac{9}{13}$%	7.69%
$\frac{1}{14}$	$7\frac{1}{7}$%	7.14%
$\frac{1}{15}$	$6\frac{2}{3}$%	6.67%
$\frac{1}{16}$	$6\frac{1}{4}$%	6.25%
$\frac{1}{17}$	$5\frac{15}{17}$%	5.88%
$\frac{1}{18}$	$5\frac{5}{9}$%	5.55%
$\frac{1}{19}$	$5\frac{5}{19}$%	5.26%
$\frac{1}{20}$	5%	0.05
$\frac{1}{21}$	$4\frac{16}{21}$%	4.76%
$\frac{1}{22}$	$4\frac{6}{11}$%	4.54%
$\frac{1}{23}$	$4\frac{8}{23}$%	4.34%
$\frac{1}{24}$	$4\frac{1}{6}$%	4.16%
$\frac{1}{25}$	4%	0.04
$\frac{1}{40}$%	$2\frac{1}{2}$%	2.5%

कुछ महत्वपूर्ण व्युत्पन्न भिन्न

भिन्न	प्रतिशत	दशमलव
$\frac{3}{8}$	$37\frac{1}{2}$%	37.5%
$\frac{5}{8}$	$62\frac{1}{2}$%	62.5%
$\frac{7}{8}$	$87\frac{1}{2}$%	87.5%
$\frac{3}{11}$	$27\frac{3}{11}$%	27.27%
$\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$%	66.66 %

@apna_pdf

$\frac{7}{3}$	$233\frac{1}{3}\%$	233.33%
$\frac{9}{8}$	$112\frac{1}{2}\%$	112.5%
$\frac{2}{7}$	$28\frac{4}{7}\%$	28.56%
$\frac{6}{7}$	$85\frac{5}{7}\%$	85.71%
$\frac{5}{6}$	$83\frac{1}{3}\%$	83.33%
$\frac{11}{12}$	$91\frac{2}{3}\%$	91.66%

ये उपरोक्त भिन्न बहुत महत्वपूर्ण हैं और इन्हें सीखना बहुत ही उपयोगी होगा।

कुछ महत्वपूर्ण बिंदु

1. किसी संख्या में 35% की वृद्धि करने पर

35% का अर्थ $\frac{35}{100}$ इसलिए मूल मान 100 में 35 जोड़ने पर प्राप्त होता है,

$\frac{100+35}{100} = \frac{135}{100} = \frac{27}{20}$

उदाहरण :- एक संख्या 36 बढ़ने पर अपने 109% के बराबर हो जाती है तो वह संख्या क्या है?
RRB ALP Tier - II (23/01/2019) Morning
(a) 300 (b) 360 (c) 400 (d) 450
हल :-
प्रतिशत में वृद्धि = 9%
9% = 36
100 % = $\frac{36}{9} \times 100 = 400$

2. किसी संख्या में 42% की कमी करने पर

42% अर्थ $\frac{42}{100}$ इसलिए मूल मान 100 से 42 घटाने पर प्राप्त होता है

$\frac{100-42}{100} = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$

उदाहरण :- एक संख्या जब $22\frac{1}{2}\%$ कम हो जाती है तब 217 है . संख्या कितनी है
RRB NTPC CBT - I 29/12/2020 (Evening)
(a) 420 (b) 280 (c) 212 (d) 315
हल :-
$22\frac{1}{2}\% = \frac{9}{40}$

	प्रारंभिक	:	अंतिम
संख्या	→ 40	:	31

31 इकाई= 217,
तो, प्रारंभिक संख्या (40 इकाइयाँ) = $\frac{217}{31} \times 40 = 280$

3. यदि किसी मात्रा में x% की वृद्धि की जाती है, तो मूल मूल्य पर लौटने के लिए, हमें इसे $\frac{x}{100+x} \times 100\%$ कम करना होगा

उदाहरण :- यदि 100 में 25% की वृद्धि की जाती है, तो मूल मूल्य पर लौटने के लिए, हमें इसे 20% तक कम करना होगा जैसा कि दिखाया गया है:
हल :-

$\frac{25}{100+25} \times 100\% = \frac{25}{125} \times 100\% = 20\%$.
या $100 \xrightarrow{+25\%} 125 \xrightarrow{-20\%} 100$

4. यदि P, Q से y% अधिक है, तो Q, P से $\frac{y}{100+y} \times 100\%$ छोटा है

उदाहरण :- यदि P, Q से 40% अधिक है, तो Q, P से कितना छोटा है
हल :-
$\frac{40}{100+40} \times 100\% = 28.57\%$

5. यदि कोई मात्रा x% कम हो जाती है, तो मूल मूल्य पर लौटने के लिए, हमें इसे $\frac{x}{100-x} \times 100\%$ बढ़ाना होगा

उदाहरण :- यदि 100 में 20% की कमी हो जाती है, तो 100 पर लौटने के लिए हमें इसे बढ़ाना होगा
हल:-
या $100 \xrightarrow{-20\%} 80 \xrightarrow{+25\%} 100$

6. यदि P, Q से y% छोटा है, तो Q, P से $\frac{y}{100-y} \times 100\%$ बड़ा है

उदाहरण :- यदि P, Q से 30% छोटा है, तो Q, P से कितना बड़ा है
हल :-
$\frac{30}{100-30} \times 100\% = \frac{3}{7} \times 100\% = 42.85\%$

7. यदि कोई व्यक्ति अपनी आय का ,भोजन पर a%, यात्रा पर b% और सिनेमा पर c% खर्च करने के बाद 'A' रुपये बचाता है,
तो मासिक आय = $\frac{100}{100-[a+b+c]} \times A$

उदाहरण :- जय अपनी मासिक आय का 50% किराने और बिलों पर खर्च करता है, अपनी मासिक आय का 20% कपड़े खरीदने पर, अपनी मासिक आय का 5% दवाओं पर खर्च करता है, और शेष राशि ₹12,500 वह बचाता है। जय की मासिक आय क्या है?
Matriculation Level 30/06/2023 (Shift - 3)
(a) ₹45,000 (b) ₹57,500 (c) ₹65,000 (d) ₹50,000
हल :-
मासिक आय = $\frac{100}{100-[50+20+5]} \times 12500$
$= \frac{100}{25} \times 12500 = 50000$ Rs.
Exam Hall Approach :
जय की बचत = 100% – (50% + 20% + 5%) = 25%
प्रश्न के अनुसार,
कुल आय का 25% = 12500 Rs.
कुल आय (100%) = 12500 × 4 = 50000 Rs.

8. यदि किसी वर्ग की भुजा या वृत्त की त्रिज्या में a% की वृद्धि होती है, तो क्षेत्रफल में वृद्धि होती है:

$(2a + \frac{a^2}{100})\%$

or

9. यदि किसी वर्ग की भुजा या वृत्त की त्रिज्या a% कमी हो जाती है, तो क्षेत्रफल

@apna_pdf

में कमी होती है:

$(-2a + \frac{a^2}{100})\%$

उदाहरण :- यदि किसी वृत्त की त्रिज्या 10% बढ़ा दी जाए। तो इसका क्षेत्रफल बढ़ जाएगा:
SSC CHSL 20/03/2023 (4th Shift)
(a) 100% (b) 20% (c) 21% (d) 19%
हल :-

क्षेत्रफल में वृद्धि = $(2a + \frac{a^2}{100})\% = (2 \times 10 + \frac{10^2}{100})\% = 21\%$

Exam Hall Approach :

10% का भिन्न मान = $\frac{1}{10}$

वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2
पुराना क्षेत्रफल : नया क्षेत्रफल
100 : 121

क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{21}{100} \times 100 = 21\%$

10. एक घनाभ की लंबाई a%, चौड़ाई b% और ऊँचाई h% बढ़ाने से उसका आयतन बढ़ जाता है

$(a + b + c + \frac{ab + bc + ca}{100} + \frac{abc}{10000})\%$

उदाहरण :- एक घनाभ की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 10% और 20% बढ़ जाती है, और इसकी ऊंचाई 20% कम हो जाती है। घनाभ के आयतन में प्रतिशत वृद्धि है:
SSC CHSL 14/10/2020 (Morning)
(a) $5\frac{4}{5}\%$ (b) $5\frac{1}{5}\%$ (c) $5\frac{2}{5}\%$ (d) $5\frac{3}{5}\%$
हल :-
इसकी मात्रा बढ़ जाती है

$= (10 + 20 - 20 + \frac{10\times20 - 20\times20 - 20\times10}{100} - \frac{10\times20\times20}{10000})\%$

$= (10 - \frac{400}{100} - \frac{4}{10}) = 6 - \frac{2}{5} = 5\frac{3}{5}\%$

Exam Hall Approach :
माना प्रत्येक भुजा = 10
आयतन = 10 × 10 × 10 = 1000
नई लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई =11,12,8
नया आयतन = 11 × 12 × 8 = 1056

आवश्यक प्रतिशत = $\frac{56}{1000} \times 100 = 5\frac{3}{5}\%$

11. यदि कुल राशि (A) का x% पहले व्यक्ति द्वारा लिया जाता है, शेष राशि का y% दूसरे व्यक्ति द्वारा लिया जाता है, और शेष राशि का z% तीसरे व्यक्ति द्वारा लिया जाता है, तो यदि R शेष राशि है, तो प्रारंभिक राशि :

$R \times [\frac{100}{100 - x}][\frac{100}{100 - y}][\frac{100}{100 - z}]$

12. किसी वस्तु की कीमत में a% की वृद्धि/कमी करने पर, एक व्यक्ति 'x' किग्रा वस्तु को y रुपये में कम/अधिक खरीद सकता है,

तो बढ़ी हुई कीमत = $\frac{ay}{100 \times x}$

साथ ही, प्रारंभिक लागत = $\frac{ay}{(100 \pm a)x}$

'+' वृद्धि के लिए, '-' कमी के लिए

उदाहरण :- चावल की कीमत में 20% की कमी एक व्यक्ति को Rs.450 में 50 kg अधिक चावल प्राप्त करने में सक्षम बनाती है। चावल का मूल मूल्य प्रति kg ज्ञात कीजिए ।
SSC CGL 02/12/2022 (2nd Shift)
(a) Rs.1 (b) Rs.2 (c) Rs.1.25 (d) Rs.2.25
हल :-
व्यय = कीमत × खपत
यहां, दोनों मामलों में व्यय स्थिर है। इसलिए, कीमत का अनुपात खपत के अनुपात के व्युत्क्रमानुपाती होता है।
चावल की कीमत ⇒ 5 : 4
खपत ⇒ 4 : 5
खपत में वृद्धि = 1 इकाई → 50 किग्रा
प्रारम्भिक खपत = 4 इकाई → 200 किग्रा
मूल कीमत प्रति किलो (दर)= $\frac{\text{कुल व्यय}}{\text{कुल खपत}}$

$= \frac{450}{200} = 2.25$ रुपये/किग्रा

Exam hall approach :

मूल कीमत प्रति किलो = $\frac{20 \times 450}{(100 - 20)50} = \frac{20 \times 450}{80 \times 50} = \frac{9}{4}$

= 2.25रुपये/किग्रा

प्रश्नो के प्रकार :-

सरल गणना पर आधारित प्रश्न

उदाहरण :- यदि (A + B) का 20% = (A − B) का 30%, तो B का कितना प्रतिशत A के बराबर है?
SSC CGL Tier II (07/03/2023)
(a) 400% (b) 300% (c) 500% (d) 100%
हल :-
(A + B) का 20% = (A − B) का 30%
2 (A + B) = 3 (A − B)

$\frac{A}{B} = \frac{5}{1} = \frac{5}{1} \times 100 = 500\%$

उदाहरण :- R प्राप्त करने के लिए Z को क्रमशः $11\frac{1}{9}\%$ और 10% की वृद्धि की जाती है। यदि R = 165 है, तो Z का मान क्या है?
SSC MTS 25/07/2022 (Morning)
(a) 145 (b) 115 (c) 125 (d) 135
हल :-

$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$, $10\% = \frac{1}{10}$

$Z \times \frac{10}{9} \times \frac{11}{10} = 165 \Rightarrow Z = 135$

उदाहरण :- एक घनाभ की लंबाई और चौड़ाई क्रमश 10% और 20% बढ़ जाती है, और इसकी ऊंचाई 20% तक कम हो जाती है। घनाभ के आयतन में प्रतिशत वृद्धि है ।
SSC CHSL 14/10/2020 (Morning)
(a) $5\frac{4}{5}\%$ (b) $5\frac{1}{5}\%$ (c) $5\frac{2}{5}\%$ (d) $5\frac{3}{5}\%$
हल :-
माना प्रत्येक भुजा = 10
आयतन = 10 × 10 × 10 = 1000
नई लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई = 11,12,8
नई आयतन = 11 × 12 × 8 = 1056

@apna_pdf

आवश्यक प्रतिशत = $\frac{1056-1000}{1000} \times 100 = \frac{56}{10} = 5\frac{3}{5}\%$

उदाहरण :- दो संख्याएँ एक तीसरी संख्या से क्रमशः 37% और 30% कम हैं। दूसरी संख्या पहली से कितने प्रतिशत अधिक है?
SSC CHSL 6/8/2021 (Afternoon)
(a) $\frac{100}{9}$ (b) $\frac{10}{9}$ (c) 10 (d) $\frac{100}{3}$

हल :-
माना , तीसरा नंबर = 100
दूसरा नंबर = 63
तीसरा नंबर = 70
आवश्यक प्रतिशत = $\frac{70-63}{63} \times 100 = \frac{100}{9}$

भिन्न आधारित प्रश्न

उदाहरण :- यदि किसी भिन्न के अंश को 12% बढ़ा दिया जाए और उसके हर को 8% कम कर दिया जाए, तो यह एक नया भिन्न $\frac{16}{17}$ है. मूल भिन्न क्या है ?
Selection Post 27/06/2023 (3rd Shift)
(a) $\frac{92}{119}$ (b) $\frac{23}{28}$ (c) $\frac{28}{23}$ (d) $\frac{119}{92}$

हल :-
माना भिन्न = $\frac{a}{b}$
प्रश्न के अनुसार,
$\frac{a \times \frac{112}{100}}{b \times \frac{92}{100}} = \frac{16}{17}$
$\frac{a}{b} = \frac{16 \times 92}{17 \times 112} = \frac{1472}{1904} = \frac{92}{119}$

प्रतिशत त्रुटि आधारित प्रश्न

उदाहरण :- एक लेखाकार ने एक संख्या को $\frac{9}{2}$ के बजाय $\frac{2}{9}$ से गुणा कर दिया। उसकी गणना में लगभग कितनी प्रतिशत त्रुटि हुई?
SSC GD Constable 22/11/2021 (Afternoon)
(a) 0.95% (b) 95% (c) 9.5% (d) 0.095%

हल :-
मान लीजिए, संख्या 18 अर्थात (2, 9) का LCM है।
सही संख्या = $18 \times \frac{9}{2} = 81$
गलत संख्या = $18 \times \frac{2}{9} = 4$
आवश्यक प्रतिशत = $\frac{81-4}{81} \times 100 = \frac{77}{81} \times 100 = 95.06 \approx 95\%$

क्रमिक वृद्धि/कमी आधारित

उदाहरण :- 30% प्रत्येक की दो क्रमिक वृद्धियाँ 30% प्रत्येक की दो क्रमिक कमियों से कितने प्रतिशत अधिक हैं? (दो दशमलव स्थानों तक सही)
SSC CGL 20/07/2023 (2nd shift)
(a) 32.54% (b) 28.15% (c) 25.25% (d) 35.29%

हल :-
प्रश्न के अनुसार,
शुद्ध वेतन वृद्धि % = $30 + 30 + \frac{30 \times 30}{100} = 69\%$
शुद्ध कमी % = $-30 - 30 + \frac{30 \times 30}{100} = -51\%$ (कमी)
आवश्यक % = $\frac{69-51}{51} \times 100 = 35.29\%$

उदाहरण :- जब किसी वस्तु की कीमत में 20% की कमी की गई तो उसकी बिक्री में x% की वृद्धि हुई। यदि राजस्व प्राप्ति में 25% की वृद्धि होती है, तो x का मान है:
SSC CHSL 10/8/2021 (Evening)
(a) 53.84% (b) 55.75% (c) 56.25% (d) 61.50%

हल :-
अनुपात → प्रारंभिक : अंतिम
कीमत → 5 : 4
बिक्री → x : y

राजस्व → 4 : 5
अब , x : y = 4 × 4 : 5 × 5 = 16 : 25
बिक्री मे % वृद्धि = $\frac{25-16}{16} \times 100 = 56.25\%$

जनसँख्या आधारित प्रश्न

उदाहरण :- पहले वर्ष में कोरोना वायरस की पहली लहर के कारण एक शहर की आबादी 5% कम हो गई। अगले वर्ष दूसरी लहर के कारण यह आबादी फिर से 5% कम हो गई और तीसरे वर्ष में यह आबादी 5% बढ़ गई। यदि तीसरे वर्ष के अंत में आबादी 9,47,625 थी। तो पहले वर्ष की शुरुआत में आबादी कितनी थी?
SSC CGL 08/12/2022 (3rd Shift)
(a) 7,00,000 (b) 10,00,000 (c) 8,97,993 (d) 9,92,519

हल :-
माना कि पहले वर्ष के शुरुआत में जनसंख्या = x
प्रश्न के अनुसार ,
$x \times \frac{19}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{21}{20} = 9,47,625$
$x \times \frac{7581}{8000} = 9,47,625 \Rightarrow x = \frac{9,47,625 \times 8000}{7581} = 10,00,000$

आय और खपत पर आधारित प्रश्न

आय = खपत + बचत

उदाहरण :- रमन अपनी आय का 75% खर्च करता है। यदि उसकी आय में 20% की वृद्धि होती है और व्यय में भी 10% की वृद्धि होती है, तो रमन की बचत में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?
SSC CHSL 08/08/2023 (4th Shift)
(a) 35% (b) 40% (c) 50% (d) 45%

हल :-
माना रमन की आय = 100
आय = व्यय + बचत
प्रारंभिक :- 100 = 75 + 25
अंतिम :- 120 = 82.5 + 37.5
बचत में % वृद्धि = $\frac{37.5-25}{25} \times 100 = 50\%$

@apna pdf

उदाहरण :- P और Q का कुल वेतन ₹6,40,000 है। P और Q अपने-अपने वेतन का क्रमश: 60% और 40% बचाते हैं। यदि उनके व्यय समान हैं, तो P के वेतन और Q के वेतन का अनुपात क्या है?
SSC MTS 14/09/2023 (3rd Shift)
(a) 4 : 3 (b) 2 : 3 (c) 3 : 2 (d) 3 : 4
हल :-
माना P का वेतन = $100R_1$
और Q का वेतन = $100R_2$
P का व्यय = 40% का $100R_1$ = $40R_1$
Q का व्यय = 60% का $100R_2$ = $60R_2$
प्रश्न के अनुसार,
$40R_1 = 60R_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{2}$
आवश्यक अनुपात = 100 × 3 : 100 × 2 = 3 : 2

परीक्षा आधारित प्रश्न

उदाहरण :- एक परीक्षा में, अनीता को 31% अंक मिले तथा वह 16 अंकों से फेल हो गयी । सुनीता को 40% अंक मिले तथा उसके अंक उत्तीर्ण होने के लिए आवश्यक अंक से 56 अधिक थे । उत्तीर्ण होने के लिए न्यूनतम कितने अंकों की आवश्यकता है ?
SSC CGL 07/03/2020 (Morning)
(a) 3116 (b) 3944 (c) 7100 (d) 264
हल :-
माना M अधिकतम अंक है
प्रश्न के अनुसार:
M का 31% + 16 = M का 40% - 56
M का 9% = 72 ⇒ M = 800
उत्तीर्ण अंक = M का 40% - 56 = 320 - 56 = 264

उदाहरण :- 40 प्रश्नों वाली एक परीक्षा में, किसी अभ्यर्थी ने पहले 80 प्रश्नों में से 70% प्रश्नों का उत्तर सही दिया । इस परीक्षा में 60% अंक लाने के लिए अभ्यर्थी को शेष प्रश्नों में से कितने प्रतिशत प्रश्नों का उत्तर सही देना होगा ?
SSC CPO 11/12/19 (Morning)
(a) 40% (b) $45\frac{1}{3}$% (c) $46\frac{2}{3}$% (d) 35%
हल :-
प्रश्न के अनुसार 140 उम्मीदवार में से 80 में से 70% प्रश्नों के सही उत्तर दिए
$= \frac{(70 \times 80)}{100} = 56$
परीक्षा में 60% स्कोर करने के लिए छात्र को सवालों के जवाब देने होंगे
$= 140 \times \frac{60}{100} = 84$ प्रश्न सही
आवश्यक प्रतिशत = $\frac{(84-56)}{60} \times 100 = 46\frac{2}{3}$%

उदाहरण :- रमेश द्वारा प्राप्त कुल अंकों का अनुमानित प्रतिशत ज्ञात कीजिए, जिन्होंने तीन परीक्षाओं में क्रमशः अधिकतम 100, 130 और 150 के साथ 50%, 60% और 70% अंक प्राप्त किए।
RRB NTPC CBT - I 12/03/2021 (Evening)
(a) 61.32 (b) 71.23 (c) 55.5 (d) 70.1
हल :-
कुल प्राप्त अंक
$= \frac{100 \times 50}{100} + \frac{130 \times 60}{100} + \frac{150 \times 70}{100}$
= 50 + 78 + 105 = 233
कुल अधिकतम अंक = 100 + 130 + 150 = 380
फिर, कुल योग% = $\frac{233}{380} \times 100 = 61.32\%$

उदाहरण :- एक स्कूल में 1400 लड़के और 600 लड़कियां हैं। परीक्षा में 40% लड़कियां और 60% लड़के उत्तीर्ण हुए। असफल उम्मीदवारों का प्रतिशत क्या है?
RRB NTPC CBT - I 16/02/2021 (Morning)
(a) 46% (b) 65% (c) 72% (d) 63%
हल :-
लड़के = 1400 , लड़कियाँ = 600
40% लड़कियां = $600 \times \frac{40}{100} = 240$,
60% लड़के = $1400 \times \frac{60}{100} = 840$
असफल उम्मीदवारों की कुल संख्या = लड़की का 60% + लड़कों का 40%
= 360 + 560 = 920
असफल उम्मीदवारों का प्रतिशत = $\frac{920}{2000} \times 100 = 46\%$

चुनाव आधारित प्रश्न

उदाहरण :- एक चुनाव में 8% मतदाताओं ने अपना मत नहीं डाला। दो उम्मीदवारों ने चुनाव लड़ा, जिसमें जीतने वाले उम्मीदवार को कुल मतों के 48% मत मिले और वह 1100 मतों से चुनाव जीत गया। चुनाव में मतदाताओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए, यह देखते हुए कि डाले गए सभी मत वैध थे।
SSC CGL 02/12/2022 (1st Shift)
(a) 25500 (b) 26500 (c) 27500 (d) 28500
हल :- माना , कुल वोट की संख्या = 100%
फिर, डाले गए कुल वोट = 100% - 8% = 92%
अब विजेता को कुल वोटों का 48 % = 48 %
फिर, पराजित उम्मीदवारों को कुल वोट मिले = 92% - 48% = 44%
विजेता और पराजित उम्मीदवारों के बीच का अंतर = 4% = 1100 वोट
कुल मतदाताओं की संख्या = 100% = 27500

उदाहरण :- तीन उम्मीदवारों के बीच एक गाँव के चुनाव में, 80% मतदाताओं ने अपने मत डाले, जिनमें से 3% मत अवैध घोषित कर दिए गए। जीतने वाले उम्मीदवार को 42,680 मत मिले जो कुल वैध मतों का 55% थे। तीसरे स्थान पर रहने वाले उम्मीदवार द्वारा प्राप्त किये गए वैध मतों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि उसे कुल वैध मतों का केवल 10% प्राप्त हुआ।
SSC CHSL 03/08/2023 (1st Shift)
(a) 7760 (b) 7700 (c) 7670 (d) 7680
हल :-
कुल वैध वोट = $x \times \frac{80}{100} \times \frac{97}{100}$
विजेता को मिले वोट = $x \times \frac{80}{100} \times \frac{97}{100} \times \frac{55}{100}$ = 42,680 वोट
x = 1,00,000 वोट
तीसरे को वोट मिले
= $1,00,000 \times \frac{80}{100} \times \frac{97}{100} \times \frac{10}{100}$ = 7760 वोट

कमीशन पर आधारित प्रश्न

उदाहरण :- किसी विपणन एजेंट को एक माह में पहले 2,00,000 रुपये की बिक्री पर 2%, अगले 200000 रुपये की बिक्री पर 1.5% तथा बिक्री की शेष राशि पर 1% कमीशन मिलता है । यदि अप्रैल 2018 माह में उस एजेंट ने 5,68,000 रुपये की बिक्री की है, तो उसके द्वारा प्राप्त कमीशन ज्ञात करें ।
SSC CPO 15/03/2019 (Morning)
(a) Rs.8680 (b) Rs.7730 (c) Rs.8240 (d) Rs.7105
हल :-
कुल कमीशन → 200000 × 2% + 200000 × 1.5% + 168000 × 1%

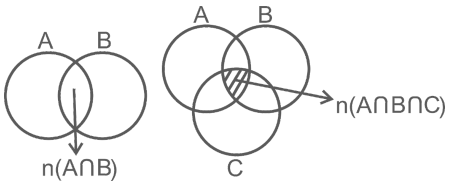
@aman_gat

= 8680 Rs.

वेन आरेख आधारित प्रश्न

वेन आरेख अवधारणा :

1. n(A U B) = n(A) + n(B) - n(A ∩ B)
2. n(A U B U C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A ∩ B) - n(B ∩ C) - n(A ∩ C) + n(A U B U C)

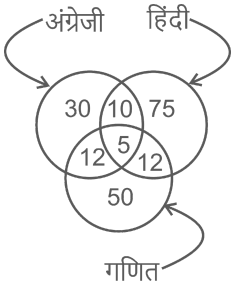


उदाहरण :- अंग्रेजी, हिंदी और गणित की परीक्षा में 500 उम्मीदवार उपस्थित हुए। 30 अभ्यर्थी केवल अंग्रेजी में अनुत्तीर्ण ; 75 केवल हिन्दी में अनुत्तीर्ण; 50 केवल गणित में अनुत्तीर्ण हुए; 15 अंग्रेजी और हिंदी दोनों में अनुत्तीर्ण ; 17 हिंदी और गणित दोनों में अनुत्तीर्ण ; 17 गणित और अंग्रेजी दोनों में अनुत्तीर्ण; तीनों परीक्षणों में 5 अनुत्तीर्ण रहे। कम से कम दो पाठ्यक्रमों में अनुत्तीर्ण होने वाले अभ्यर्थियों का प्रतिशत क्या है?

UPSC CDS - I (10/04/2022)

(a) 5.4% (b) 6.4% (c) 6.8% (d) 7.8%

हल :-



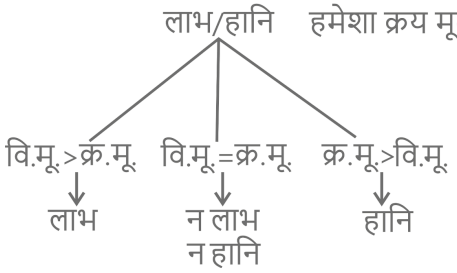
कम से कम दो विषयों में अनुत्तीर्ण अभ्यर्थियों की संख्या = (12 + 10 + 12 + 5) = 39

आवश्यक प्रतिशत = $\frac{39}{500} \times 100 = 7.8\%$

@apna_pdf

लाभ और हानि

ध्यान दे:-लाभ और हानि की गणना हमेशा क्रय मूल्य पर की जाती है



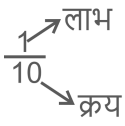
1.

लाभ %	हानि %
$\frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$	$\frac{\text{हानि}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$

Type - 1

(a) जब किसी वस्तु को लाभ पर बेचा जाता है :-

लाभ % = 10% = $\frac{1}{10}$

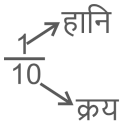


क्र. मू. + लाभ = वि. मू.

10 + 1 = 11 (वि. मू.)

(b) जब किसी वस्तु को हानि पर बेचा जाता है :-

हानि % = 10% = $\frac{1}{10}$



क्र. मू. - हानि = वि. मू.

10 - 1 = 9 (वि. मू.)

उदाहरण :- एक वस्तु का क्रय मूल्य 5,000 है। वस्तु का विक्रय मूल्य कितना होना चाहिए ताकि 25% का लाभ अर्जित किया जा सके?

RRC Group D 09/09/2022 (Afternoon)

(a) ₹6,250 (b) ₹7,250 (c) ₹5,250 (d) ₹8,250

हल :-

आवश्यक विक्रय मूल्य = 5000 × $\frac{125}{100}$ = ₹6,250

Exam hall approach :-

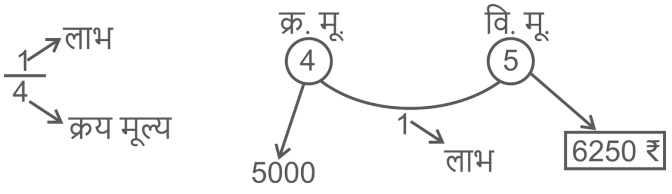
लाभ = 25% = $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}}$

क्रय मूल्य = 4 यूनिट , लाभ = 1 यूनिट

विक्रय मूल्य = 4 + 1 = 5 यूनिट

4 यूनिट = 5000 ⇒ 1 यूनिट= 125

(विक्रय मूल्य) 5 यूनिट = 5 × 125 = ₹ 6,250



उदाहरण :- एक घड़ी ₹3,200 में खरीदी जाती है और ₹2,700 में बेची जाती है। दशमलव के दो स्थानों तक प्रतिशत हानि की गणना करें।

SSC CGL 26/07/2023 (4th shift)

(a) 15.18% (b) 15.62% (c) 16.12% (d) 16.50%

हल :-

क्र.मू. = 3200 , वि.मू.= 2700 ,

⇒ हानि = वि.मू. - क्र.मू.

⇒ हानि = 3200 − 2700 = 500

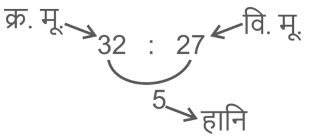
हानि % = $\frac{3200 - 2700}{3200} \times 100 = \frac{500}{32}$ = 15.62%

Exam hall approach :-

क्र.मू. : वि.मू. = 3200 : 2700 = 32 : 27

⇒ हानि = 32 - 27 = 5

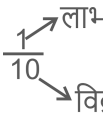
⇒ हानि% = $\frac{5}{32} \times 100$ = 15.62%



हानि % = $\frac{5}{32} \times 100$ = 15.62%

(c) जब कोई वस्तु विक्रय मूल्य पर लाभ पर बेची जाती है:-

लाभ % = 10% = $\frac{1}{10}$



क्र. मू. = वि. मू. - लाभ

क्र. मू. = 10 - 1 = 9

(d) जब कोई वस्तु विक्रय मूल्य पर हानि पर बेची जाती है:-

हानि % = 10% = $\frac{1}{10}$

क्र.मू. = वि. मू. + हानि

क्र.मू. = 10 + 1 =11

उदाहरण :- पारीख ने अपना पेन 11 रुपये के लाभ पर बेचा । उसने अपने लाभ के प्रतिशत की गणना विक्रय मूल्य पर की और इसे 25% पाया । पेन का क्रय मूल्य (रुपये में) ज्ञात करें ?

SSC MTS 13/08/2019 (Afternoon)

(a) 33 (b) 24 (c) 36 (d) 44

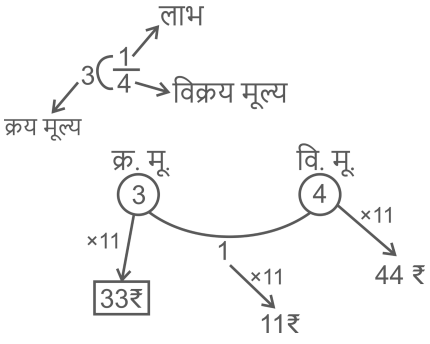
हल :- 25% का भिन्नात्मक मान = $\frac{1}{4}$

लाभ (1 इकाई) = 11 Rs.

विक्रय मूल्य = 4 इकाई और

क्रय मूल्य= (4 − 1)इकाई = 3 इकाई

⇒ 3 × 11 = 33 ₹



@apna_pdf

Type - 2

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{क्रय मूल्य} \times \frac{100 \pm \text{लाभ/हानि \%}}{100}$$

(CP = क्रय मूल्य , SP = विक्रय मूल्य)

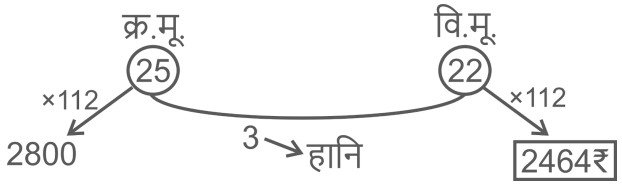
उदाहरण :- एक व्यक्ति एक टेबल फैन ₹2,800 में खरीदता है और उसे 12% की हानि पर बेचता है। टेबल फैन का विक्रय मूल्य क्या है?
SSC MTS 04/09/2023 (2nd Shift)
(a) ₹2,466 (b) ₹2,468 (c) ₹2,462 (d) ₹2,464
हल :-
क्रय मूल्य = 2800, हानि % = 12

$$\text{विक्रय मूल्य} = 2800 \times \frac{100 - 12}{100} = 28 \times 88 = ₹2{,}464$$

Exam hall approach :-

$$\text{हानि} = 12\% = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}}$$

माना :- क्रय मूल्य = 25 , हानि = 3
विक्रय मूल्य = 25 - 3 = 22
25 इकाई = 2800 ⇒ 1 इकाई = 112
22 इकाई = 22 × 112 = 2464 ⇒ विक्रय मूल्य= ₹2,464



उदाहरण :- एक वस्तु का लागत मूल्य 5,000 है। वस्तु का विक्रय मूल्य क्या होना चाहिए ताकि 25% का लाभ अर्जित हो?
RRC Group D 09/09/2022 (Afternoon)
(a) ₹6,250 (b) ₹7,250 (c) ₹5,250 (d) ₹8,250
हल :-

$$\text{आवश्यक विक्रय मूल्य} = 5000 \times \frac{100 + 25}{100} = ₹\ 6{,}250$$

Exam hall approach :-

$$\text{लाभ} = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}}$$

माना क्रय मूल्य = 4 इकाई , लाभ = 1 इकाई
विक्रय मूल्य = 4 + 1 = 5 इकाई
4 इकाई = 5000 ⇒ 1 इकाई = 125
(विक्रय मूल्य) 5 इकाई = 5 × 125 = ₹ 6,250

Type - 3

"किसी वस्तु को लाभ या हानि % मे बेच कर क्रय मूल्य ज्ञात करना"

$$\text{क्रय मूल्य} = \text{विक्रय मूल्य} \times \frac{100}{100 \pm \text{लाभ/हानि\%}}$$

नोट :- लाभ के सन्दर्भ में आपको जोड़ना **(+)** होगा और हानि के सन्दर्भ में घटाना **(-)** होगा।

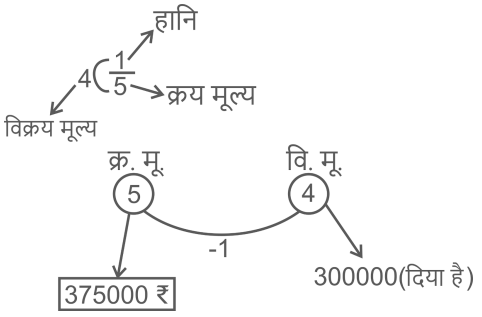
उदाहरण:- एक व्यक्ति ने एक कार खरीदी और ₹ 3, 00,000 में बेच दी। यदि उसे 20% की हानि उठानी पड़ी, तो उसने कार खरीदने में कितने रूपये खर्च किये ?
UPSC CSAT (04/10/2020)
(a) Rs. 3, 60,000 (b) Rs. 3, 65,000
(c) Rs. 3, 70,000 (d) Rs. 3, 75,000
हल:-

$$\text{कार का क्रय मूल्य} = 3{,}00{,}000 \times \frac{100}{100 - 20} = ₹3{,}75{,}000$$

Exam hall approach :-

$$\text{हानि} = 20\% = \frac{1}{5}$$

माना क्रय मूल्य = 5 इकाई , हानि = 1 इकाई , विक्रय मूल्य = 4 इकाई
4 इकाई = 300000 ⇒ 1 इकाई = 75000
(क्रय मूल्य) 5 इकाई = 5 × 75000 = ₹3,75,000



उदाहरण:- एक महिला ने अपना ईयरफोन 2,000 रुपये में बेचा और क्रय मूल्य के संख्यात्मक मूल्य के बराबर प्रतिशत लाभ प्राप्त किया। ईयरफोन का लागत मूल्य है:
SSC CHSL 03/06/2022 (Morning)
(a) ₹ 500 (b) ₹ 200 (c) ₹ 600 (d) ₹ 400
हल:-
माना ईयरफोन का क्रय मूल्य = ₹x
तब लाभ% = x

$$\text{प्रश्नानुसार}, x = 2000 \times \frac{100}{100 + x}$$

$100x + x^2 = 2000 \times 100$
$(2000 - x) \times 100 = x^2$
अब, परिणाम को संतुष्ट करने के लिए दिए गए विकल्पों में x का भिन्न-भिन्न मान रखने पर हमें
x = 400 प्राप्त होता है।
(2000 - 400) × 100 = 400 × 400
160000 = 160000 (LHS = RHS)
अत: ईयरफोन का क्रय मूल्य = ₹400
Exam hall approach :-
इस प्रकार के प्रश्न में, विकल्प से चेक करे :-
विकल्प (d) → माना क्रय मूल्य = 400 रु. और
लाभ% = 400%
तब, विक्रय मूल्य = 400 + 400 × 400% = 2000 ₹

Type - 4

जब राशि के स्थान पर बेची गई वस्तुओं की संख्या दी जाती है तो :-

x वस्तु को बेचने पर लाभ या हानि, y वस्तु के विक्रय मूल्य के बराबर होती है

$$\text{लाभ \%} = \frac{100 \times y}{x - y} \quad , \quad \text{हानि\%} = \frac{100 \times y}{x + y}$$

उदाहरण :- 8 वस्तुओं को बेचने पर एक दुकानदार को 2 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर का लाभ होता है। दुकानदार का लाभ प्रतिशत कितना है?
SSC MTS 05/09/2023 (3rd Shift)
(a) 25% (b) $16\frac{2}{3}\%$ (c) $33\frac{1}{3}\%$ (d) 30%
हल:- $\text{लाभ \%} = \frac{100 \times y}{x - y}$

@apna_pdf

लाभ % = $\frac{100 \times 2}{8-2} = \frac{200}{6} = 33\frac{1}{3}$ %

Exam hall approach :-

प्रश्न के अनुसार

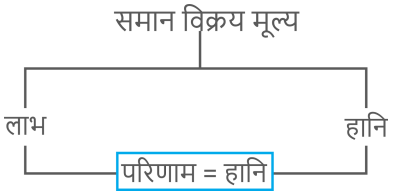
8 × विक्रय मूल्य − 8 × क्रय मूल्य = 2 × विक्रय मूल्य

$\frac{\text{क्रय मूल्य}}{\text{विक्रय मूल्य}} = \frac{3}{4}$

तो, लाभ % = $\frac{1}{3} \times 100 = 33\frac{1}{3}$ %

Type - 5

जब दो उत्पाद समान विक्रय मूल्य पर बेचे जाते हैं, एक x% की हानि पर और दूसरा x% के लाभ पर, तो परिणाम हमेशा हानि होता है,



शुद्ध परिणाम = $(\frac{x^2}{100})\%$

उदाहरण :- एक व्यक्ति ने ₹60,000 प्रत्येक में दो कारें बेचीं। एक पर उसे 20% का लाभ हुआ, जबकि दूसरे पर उसे 20% की हानि हुई। उसके लाभ या हानि का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

SSC CPO 05/10/2023 (2nd Shift)

(a) न लाभ और न हानि (b) हानि 4% (c) हानि 2% (d) लाभ 4%

हल :-

Exam hall approach :-

प्रश्न के अनुसार,

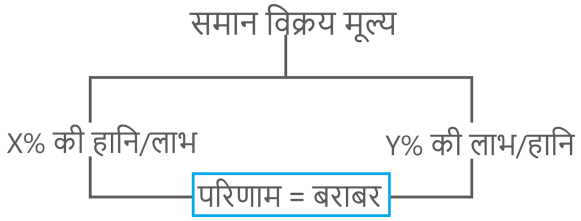
हानि% = $\frac{(20)^2}{100}$ = 4%

Type - 6

जब दो उत्पाद समान विक्रय मूल्य पर बेचे जाते हैं, एक x% की हानि/लाभ पर और दूसरा y% की हानि/लाभ पर, तो शुद्ध परिणाम बराबर होता है :

शुद्ध परिणाम = $\{\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}\}\%$

(लाभ के लिए हम + चिन्ह लेते हैं और हानि के लिए हम - चिन्ह लेते हैं)



उदाहरण :- एक व्यापारी ₹15000 प्रति मशीन की दर से दो मशीनें बेचता है। एक मशीन पर उसे 20 प्रतिशत का लाभ होता है और दूसरी पर उसे 40 प्रतिशत की हानि होती है। पूरे लेन-देन में उसका लाभ / हानि प्रतिशत कितना है?

SSC CHSL 13/03/2023 (1st Shift)

(a) 20 प्रतिशत हानि (b) 10 प्रतिशत हानि

(c) 10 प्रतिशत लाभ (d) 20 प्रतिशत लाभ

हल :-

शुद्ध परिणाम = $\frac{100(20-40)+2\times20\times-40}{200+20-40}$

= $\frac{100\times-20-1600}{180} = \frac{-3600}{180}$ = - 20%

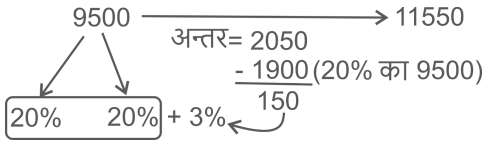
Type - 7

जब दो वस्तुएं x रुपये में खरीदी गईं, और एक वस्तु a% लाभ पर बेची गई तथा दूसरी b% लाभ पर बेची गई, तो प्रत्येक वस्तु का लागत मूल्य।

उदाहरण :- कोई व्यक्ति दो वस्तुओ को 9500 रुपये मे खरीदता है तथा पहली वस्तु को 20% लाभ पर बेचता है जबकि दूसरी वस्तु को 23% लाभ पर बेचता है । यदि कुल विक्रय मूल्य 11550 रुपये है तो दोनों वस्तुओ का क्रय मूल्य ज्ञात करे ?

हल :-

प्रश्न के अनुसार,



⇒ 3% = 150

इसलिए , 100% = 5000 (23% लाभ पर बेची गई वस्तु का क्रय मूल्य)

अतः , 20% लाभ पर बेची गई वस्तु का क्रय मूल्य = 9500 - 5000 = 4500 रु.

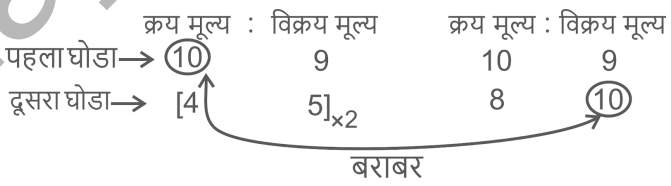
जब पहली वस्तु का क्रय मूल्य दूसरे वस्तु के विक्रय मूल्य के बराबर हो तो कुल लाभ या हानि ज्ञात करे

उदाहरण :- एक व्यक्ति दो घोड़ों को 1710 रुपये में बेचता है। पहले घोड़े का क्रय मूल्य दूसरे के विक्रय मूल्य के बराबर है। यदि पहले को 10% हानि पर और दूसरी को 25% लाभ पर बेचा जाता है। उसका कुल लाभ या हानि (रुपये में) क्या है?

MP Forest Guard 27/07/2017 (Shift 2)

(a)95 (b) 90 (c)100 (d)85

हल :-



प्रश्न अनुसार

19 इकाई = 1710 रुपये

अतः , लाभ = 19 - 18 = 1 इकाई

1 इकाई = 90 रुपये

Type - 8

औसत की अवधारणा

	वस्तु$_1$	:	वस्तु$_2$	:	वस्तु$_3$
मूल्य/मात्रा →	x	:	y	:	z
लाभ/हानि % →	a	:	b	:	c

कुल मिलाकर लाभ/हानि % = $\frac{ax+by+cz}{x+y+z}$ %

*** लाभ-हानि के अनुसार +ve और -ve का चिन्ह।**

उदाहरण :- एक आदमी सेब, केले और संतरे को क्रमशः 20%, 25% और 30% लाभ पर बेचता है। यदि फलों की लागत का अनुपात 2 : 3 : 5 है, और फलों को 5 : 4 : 2 के अनुपात में बेचा जाता है, तो उसका लाभ प्रतिशत है:

SSC MTS 22/10/2021 (Afternoon)

(a) 18% (b) 30% (c) 20% (d) 25%

हल :-

अनुपात → सेब : केला : संतरा

@apna_pdf

मूल्य → 2 × 5 : 3 × 4 : 5 × 2 = 5 : 6 : 5
अनुपात → सेब : केला : संतरा
मूल्य/मात्रा → 5 : 6 : 5
लाभ/हानि % → +20 % : +25% : +30%

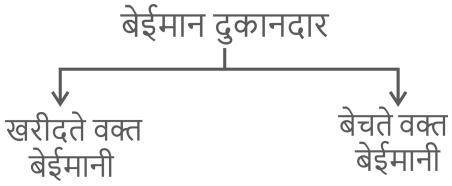
कुल मिलाकर लाभ/हानि % → $\frac{100+150+150}{5+6+5}$ % = 25%

Type - 9

बेईमान दुकानदार/व्यापारी

यदि कोई व्यापारी लागत मूल्य पर माल बेचने का दावा करता है लेकिन गलत वजन का उपयोग करता है, तो

लाभ प्रतिशत = $\frac{\text{त्रुटि}}{\text{सही मान} - \text{त्रुटि}} \times 100$,
जहां त्रुटि = सही मान - गलत मान



बेचते समय बेईमानी

उदाहरण :- एक बेईमान डीलर अपने माल को क्रय मूल्य पर बेचने का दावा करता है, लेकिन गलत बाट का उपयोग करता है, और इस प्रकार 20% लाभ प्राप्त करता है। एक किलोग्राम के लिए, वह कितने ग्राम वाले बाट का उपयोग करता है?
RRC Group D 26/08/2022 (Evening)
(a) 750.5 gm (b) 708.06 gm (c) 833.33 gm (d) 785.5 gm
हल :- माना त्रुटि = x ग्राम

लाभ प्रतिशत = $\frac{\text{त्रुटि}}{\text{सही वजन} - \text{त्रुटि}} \times 100$

$20 = \frac{x}{1000 - x} \times 100$
$20000 - 20 \times x = 100\ x$
$x = \frac{20000}{120}$ = 166.66 ग्राम
अतः इस्तेमाल किए गए बाट का वजन = 1000 - 166.66 = 833.33 ग्राम
Exam hall approach :-

C.P : S.P
100 : 120
X ग्राम : 1000 ग्राम
₹ 120 मे → 1000 ग्राम
₹ 100 मे → $\frac{1000 \times 100}{120}$ = 833.33 ग्राम

खरीदते समय बेईमानी

उदाहरण:- एक दोषपूर्ण तराजू में बाएँ किनारे का वजन दाएँ किनारे से 100 ग्राम अधिक है। एक दुकानदार खरीदारी करते समय बाएँ किनारे पर बाट रखता है और बेचते समय दाएँ किनारे पर बाट रखता है। वह केवल 1 किलो वजन का उपयोग करता है। यदि वह वस्तुओं को अंकित मूल्य पर बेचता है, तो उसका लाभ कितना है?
CG TET 2016 PAPER 2 (Math & science)
(a) $\frac{100}{9}$% (b) $\frac{200}{11}$% (c) $\frac{100}{11}$% (d) $\frac{200}{9}$%
हल:-

$\frac{\text{वि०मू०}_{\text{सही}}}{\text{क्र०मू०}_{\text{सही}}} = \frac{\text{वि०मू०}_{\text{दिया}}}{\text{क्र०मू०}_{\text{दिया}}} \times \frac{\text{वास्तविक मूल्य}}{\text{गलत मान}}$

$\frac{\text{वि०मू०}_{\text{सही}}}{\text{क्र०मू०}_{\text{सही}}} = \frac{1100}{1000} \times \frac{1000}{900} = \frac{11}{9}$

लाभ % = $\frac{2}{9} \times 100 = \frac{200}{9}$%

Exam hall approach :-

क्र०मू० : वि०मू०
1000 : 1100
900 : 1000

अंतिम → 9 : 11 ⇒ लाभ % = $\frac{2}{9} \times 100 = \frac{200}{9}$%

Type - 10

यदि कोई दुकानदार अपनी वस्तुएं लागत मूल्य पर x% हानि पर बेचता था लेकिन z ग्राम के बजाय y ग्राम का उपयोग करता है, तो :

लाभ या हानि% = $[(100 - x)\frac{z}{y} - 100]$%

*** लाभ या हानि के अनुसार +ve या -ve का चिन्ह।**

उदाहरण :- एक बेईमान व्यापारी लागत मूल्य पर 12.5% हानि पर सामान बेचता है, लेकिन 36 ग्राम के बजाय 28 ग्राम वजन का उपयोग करता है। उसका प्रतिशत लाभ या हानि क्या है?
SSC CGL 2022 Tire - I (Held On : 01 Dec 2022 shift 1)
(a) 6.25% हानि (b) 12.5% लाभ (c) 18.75% लाभ (d) 10.5% हानि
हल :-
विधि - 1

लाभ या हानि % = $[(100 - x)\frac{z}{y} - 100]$%
= $[(100 - 12.5)\frac{36}{28} - 100]$% = $[87.5 \times \frac{36}{28} - 100]$%
= [112.5 - 100] % = 12.5 %

विधि - 2

$\frac{\text{वि०मू०}_{\text{सही}}}{\text{क्र०मू०}_{\text{सही}}} = \frac{\text{वि०मू०}_{\text{दिया}}}{\text{क्र०मू०}_{\text{दिया}}} \times \frac{\text{वास्तविक मूल्य}}{\text{गलत मान}}$

$\frac{\text{वि०मू०}_{\text{सही}}}{\text{क्र०मू०}_{\text{सही}}} = \frac{7}{8} \times \frac{36}{28} = \frac{9}{8} \Rightarrow$ लाभ % = $\frac{1}{8} \times 100 = 12.5\%$

Exam hall approach :-

12.5% का भिन्नात्मक मान = $\frac{1}{8}$

क्र०मू० : वि०मू०
12.5% → 8 : 7
दोषपूर्ण वजन → 28 : 36

अंतिम अनुपात → 8 : 9

लाभ % = $\frac{\text{वि०मू०} - \text{क्र०मू०}}{\text{क्र०मू०}} \times 100 = \frac{9-8}{8} \times 100 = 12.5\%$

Type - 11

यदि कोई व्यक्ति 'a' वस्तु x रुपये में खरीदता है। और y रुपये में 'b' वस्तु बेचता है। तो उसका लाभ% या हानि% इस प्रकार दिया जाता है:

लाभ% या हानि% = $\frac{ay - bx}{bx} \times 100\%$

उदाहरण :- एक दुकानदार ने 10 की दर से ₹15 में टॉफियां खरीदी और उन्हें ₹40 में 16 की दर से बेच दिया। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए। (दो दशमलव स्थान तक सही)

@apna_prf

SSC CGL 21/04/2022 (Morning)
(a) 65.05% (b) 33.33% (c) 50.55 (d) 66.67%

हल :- लाभ % = $\frac{10 \times 40 - 16 \times 15}{16 \times 15} \times 100$

$= \frac{400 - 240}{240} \times 100 = \frac{160}{240} \times 100 = 66.67\%$

Exam hall approach :-

10 टॉफ़ी का क्रय मूल्य = ₹15

16 टॉफ़ी का क्रय मूल्य = $\frac{15}{10} \times 16 = 24$

16 टॉफ़ी का विक्रय मूल्य = ₹40

अनुपात → क्रय : विक्रय

24 : 40 या 3 : 5

लाभ % = $\frac{2}{3} \times 100 = 66.67\%$

Type - 12

क्रमिक लाभ या हानि %

(a) क्रमिक लाभ या जब कोई वस्तु पहले x% लाभ पर बेचा जाता है और फिर y% लाभ पर बेचा जाता है, तो मूल में समग्र परिवर्तन होता है

$= + x\% + y\% + \frac{xy}{100}\%$

उदाहरण :- अनिल बीना को 20% के लाभ पर एक कार बेचता है। बीना इसे करण को 25% के लाभ पर बेच देती है। यदि करण इसके लिए ₹2,25,000 का भुगतान करता है, तो अनिल के लिए कार का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

SSC MTS 12/09/2023 (1st Shift)
(a) ₹ 1,75,000 (b) ₹ 2,00,000 (c) ₹ 1,50,000 (d) ₹ 1,25,000

हल :-

समग्र परिवर्तन = +20% + 25% + $\frac{20 \times 25}{100}$ % = 50%

150% = ₹2,25,000

1% = $\frac{₹2,25,000}{150}$ = 1500

100 % = 150000

अनिल के लिए कार का क्रय मूल्य = Rs 1,50,000

(b) जब कोई वस्तु पहले x% लाभ पर बेचा जाता है और फिर y% हानि पर बेचा जाता है, तो मूल में समग्र परिवर्तन होता है

$= +x\% - y\% - \frac{xy}{100}\%$

उदाहरण:- राजू ने रवि को 10% के लाभ पर एक वस्तु बेची। रवि ने रामू को 10% हानि पर यह वस्तु बेच दी। यदि रामू ने रवि को ₹1,485 का भुगतान किया, तो राजू ने रवि को किस मूल्य पर वस्तु बेची।

SSC MTS 01/09/2023 (1st Shift)
(a) ₹1,200 (b) ₹1,500 (c) ₹1,650 (d) ₹1,600

हल :-

हानि प्रतिशत = 10- 10 - $\frac{10 \times 10}{100}$ = -1% (हानि)

माना कि राजू के लिए वस्तु का क्रय मूल्य = 100 इकाई

तो राजू का विक्रय मूल्य = रवि का क्रय मूल्य = 99 इकाई

99 इकाई = 1485

100 इकाई (राजू का क्रय मूल्य) = $\frac{1485}{99} \times 100 = 1500$

आवश्यक राशि = 1500 × $\frac{11}{10}$ = 1650

Exam hall approach :-

प्रश्न के अनुसार,

राजू का क्रय मूल्य = x

$x \times \frac{11}{10} \times \frac{9}{10} = ₹\ 1485 \Rightarrow x = ₹\ 1500$

आवश्यक राशि = 1500 × $\frac{11}{10}$ = ₹1650

(c) क्रमिक हानि या जब कोई वस्तु पहले x% हानि पर बेचा जाता है और फिर y% हानि पर बेचा जाता है, तो मूल में समग्र परिवर्तन होता है =

$- x\% - y\% + \frac{xy}{100}\%$

उदाहरण :- एक वस्तु का अंकित मूल्य ₹ 5,000 था। वस्तु को बेचते समय, विक्रेता ने 15% और 5% की क्रमिक छूट प्रदान की। उस वस्तु का अंतिम विक्रय मूल्य क्या था?

SSC MTS 12/07/2022 (Evening)
(a) ₹ 4,730 (b) ₹ 4,370.50 (c) ₹ 4,250 (d) ₹ 4,037.50

हल :-

मूल मूल्य में समग्र परिवर्तन = -15% - 5% + $\frac{15 \times 5}{100}$ % = - 19.25 %

100 इकाई = 5,000

80.75% इकाई = $\frac{5000}{100} \times 80.75$ = 4,037.50 Rs

(d) जब कोई वस्तु पहले x% हानि पर बेचा जाता है और फिर y% लाभ पर बेचा जाता है, तो मूल में समग्र परिवर्तन होता है =

$- x\% + y\% - \frac{xy}{100}\%$

Type - 13

मूल्य वर्धित कर (VAT) या ओवरहेड/मरम्मत व्यय

x रुपये के मूल्य वर्धित कर (वैट या VAT) के मामले में, या किसी वस्तु पर x रुपये की मरम्मत लागत के मामले में।

कुल क्रय मूल्य (CP) = वास्तविक क्रय मूल्य (CP) + वैट (VAT) या मरम्मत लागत

उदाहरण:- विनय ने ₹4,50,000 में एक फ्लैट खरीदा। उन्होंने इसकी पेंटिंग और मरम्मत पर ₹10,000 खर्च किए। फिर उसने इसे ₹4,25,500 में बेच दिया. उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

DMRC CRA 17/02/2020 (2nd shift)
(a) 6.5% हानि (b) 7.5% हानि (c) 7% लाभ (d) 6% लाभ

हल :-

प्रश्न के अनुसार,

फ्लैट का वास्तविक क्रय मूल्य = 450000 + 10000 = ₹ 460000

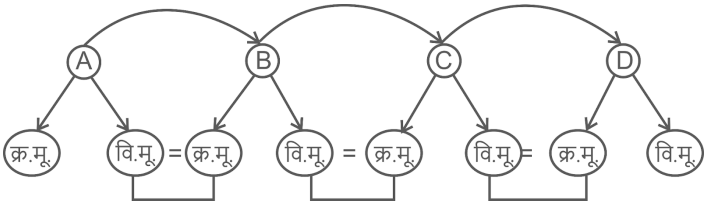
हानि = 4,60,000 - 4,25,500 = 34500

हानि% = $\frac{34500}{460000} \times 100 = 7.5\%$

Type - 14

यदि A, B को एक वस्तु a% लाभ पर बेचता है, B उस वस्तु को b% लाभ पर C को बेचता है, और C रु.x का भुगतान करता है, तो -

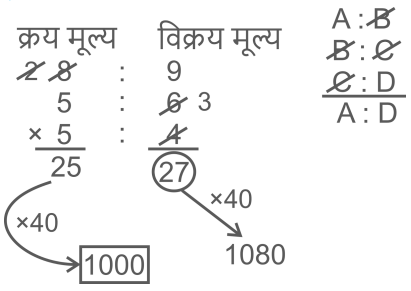
A द्वारा भुगतान की गई राशि = $x\left[\frac{100}{100+a}\right]\left[\frac{100}{100+b}\right]$



@apna_pdf

उदाहरण :- A एक वस्तु B को 12.5% लाभ पर बेचता है जबकि B उसे C को 20% के लाम पर बेचता है तथा C,D को 20% हानि पर बेचता है अगर D क्रय मूल्य 1080 Rs है तो A का क्रय मूल्य ज्ञात करें ?

हल :-



उदाहरण :- A एक वस्तु को 20% लाभ पर B को बेचता है, B उसे 10% लाभ पर C को बेचता है और 1,32,000 प्राप्त करता है। यदि C ने इसी वस्तु को A से क्रय किया होता, तो उसे B को भुगतान की गयी राशि की तुलना में 5% कम खर्च करना पड़ता। A को कितना लाभ हुआ ?
SSC CHSL 13/10/2020 (Morning)
(a) ₹ 25,400 (b) ₹24,450 (c) ₹ 25,540 (d) ₹ 24,540

हल :-

A द्वारा भुगतान की गई राशि $= 132000[\frac{100}{100+20}][\frac{100}{100+10}]$

$= 132000 \times \frac{5}{6} \times \frac{10}{11} = 100000$

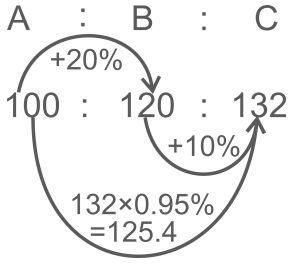
उसने B के साथ जितना खर्च किया उससे 5% कम खर्च किया

$132000 \times \frac{95}{100} = 125400$

125400 - 100000 = 25400

Exam hall Approach :-

माना, A का क्रय मूल्य = 100 इकाई



प्रश्न के अनुसार ,
C का क्रय मूल्य (132 इकाई) = 132000 ₹
A द्वारा अर्जित लाभ यदि, उसने C को वस्तु बेची होती (25.4 इकाई)
= 25400 ₹

Type - 15

एक आदमी x% के लाभ/हानि पर वस्तुएँ बेचता है। यदि उसने इसे M रुपये अधिक में बेचा होता , तो उसे y% लाभ/हानि होती,

C.P. $= [\frac{M}{y \pm x}] \times 100$

+ चिन्ह का प्रयोग तब किया जाता है जब एक लाभ हो और दूसरा हानि हो
- चिन्ह का प्रयोग तब किया जाता है जब दोनों लाभ या हानि हो

उदाहरण :- एक विक्रेता ने एक बैग को 12% के लाभ पर बेचा। यदि उसने इसे ₹900 अधिक में बेचा होता, तो उसे 27% का लाभ होता। बैग का क्रय मूल्य (CP) कितना है?
SSC CHSL 17/08/2023 (2nd Shift)
(a) ₹6,000 (b) ₹6500 (c) ₹5560 (d) ₹7000

हल :-

क्रय मूल्य $= [\frac{900}{27-12}] \times 100 = \frac{900}{15} \times 100 = 6{,}000$

Exam hall Approach :-

प्रश्न के अनुसार ,

$(27-12)\% = ₹\ 900 \Rightarrow 1\% = \frac{900}{15} = ₹\ 60$

क्रय मूल्य (100%) = ₹6,000

@apna_pdf

छूट/बट्टा

प्रमुख बिंदु :-

1. अंकित मूल्य :- किसी उत्पाद के लेबल पर कीमत, जिसे मुद्रित मूल्य या विज्ञापन मूल्य भी कहते हैं।

2. छूट :- निश्चित कीमत पर छूट की राशि को छूट कहा जाता है।

3. विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – छूट
मान लीजिये कि रु 100 अंकित मूल्य (MP) है। छूट 10% यानी 10 रुपये है, इसलिए, विक्रय मूल्य = 100 – 10 = Rs. 90

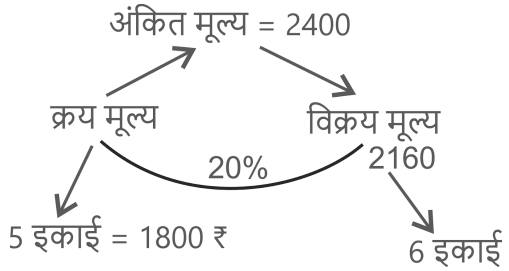
Type - 1

छूट :- छूट की गणना हमेशा अंकित मूल्य पर की जाती है।

$$\text{छूट \%} = \frac{\text{अंकित मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$$

$$\text{या ,} \frac{\text{छूट}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$$

उदाहरण :- एक वस्तु 20% का लाभ अर्जित करने के बाद 2160 रु. रुपये में बेची जाती है। यदि वस्तु का अंकित मूल्य इसके लागत मूल्य से 600 रुपये अधिक है, तो छूट प्रतिशत ज्ञात करें।
SBI PO Mains (02/01/2022)
(a) 10 (b) 20 (c) 30 (d) 40 (e) 50
हल :- माना, क्रय मूल्य = 100 इकाई
तब, विक्रय मूल्य = 120 इकाई
लेकिन, विक्रय मूल्य = 2160 रु. (दिया हुआ है)
इसलिए, 120 इकाई = 2160 ⇒ 1 इकाई = 18
तब, क्रय मूल्य = रु. 1800
अब, अंकित मूल्य = 1800 + 600 = 2400रु.
छूट = अंकित मूल्य - विक्रय मूल्य = 2400 - 2160 = 240
और छूट % = $\frac{240}{2400} \times 100 = 10\%$



Type - 2

$$\text{विक्रय मूल्य} = \frac{\text{अंकित मूल्य} \times (100 - \text{छूट\%})}{100}$$

उदाहरण:- एक वस्तु का अंकित मूल्य Rs. 480 था। परंतु दुकानदार ने वस्तु पर 5% का बट्टा दिया। अत मे वह वस्तु को किस मूल्य पर बेचता है ?
SSC CHSL 21/03/2023 (4th Shift)
(a) Rs.435 (b) Rs.450 (c) Rs.466 (d) Rs.456
हल :- विक्रय मूल्य = $\frac{480 \times (100-5\%)}{100} = \frac{480 \times 95}{100}$ = Rs. 456
Exam hall approach :-
वस्तु का विक्रय मूल्य = $480 \times \frac{95}{100} = 456$ रु.

Type - 3

(a) x की खरीद पर y मुफ्त पाएं :- छूट% = $\frac{y}{x+y} \times 100\%$

उदाहरण:- यदि ₹25 प्रत्येक की कीमत वाले 12 नारियल खरीदने पर 3 नारियल मुफ्त दिए जाते हैं, तो प्रत्येक नारियल पर प्रभावी छूट क्या है ?
SSC CGL 2022 06/12/2022
(a) 20% (b) 24% (c) 20.83% (d)15%
हल :- ऑफर के कारण उसे 3 नारियल मुफ्त मिलते हैं,
3 नारियल की कीमत = 25 × 3 = 75 रु.
कुल नारियल = 12 + 3 = 15 नारियल
15 नारियल की वास्तविक कीमत = 25 × 15 = 375 रु.
प्रभावी छूट = $\frac{75}{375} \times 100 = 20\%$
Exam Hall Approach :- कुल छूट = $\frac{\text{मुफ्त नारियल}}{\text{कुल नारियल}}$
$= \frac{3}{12+3} \times 100 = \frac{3}{15} \times 100 = 20\%$

(b) x की खरीद पर y पाएं :- छूट% = $\frac{y-x}{y} \times 100\%$

उदाहरण:- त्योहारों के दौरान, एक दुकान पर एक बैनर प्रदर्शित होता है, '3 के लिए भुगतान करें और 5 प्राप्त करें। दी जाने वाली छूट प्रतिशत कितनी है।
SSC MTS 02 /11/2021 (Morning)
(a) $166\frac{2}{3}\%$ (b) 60% (c) 40% (d) $66\frac{2}{3}\%$
हल :- छूट% = $\frac{5-3}{5} \times 100 = 40\%$

Type - 4

$$\frac{\text{क्रय मूल्य}}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{100 - \text{छूट \%}}{100 \pm \text{लाभ/हानि \%}}$$

उदाहरण:- एक पुस्तक का अंकित मूल्य 1000 रुपये है और एक पुस्तक विक्रेता इस पर 10% की छूट देता है। यदि वह फिर भी 20% लाभ अर्जित करता है, तो पुस्तक की कीमत क्या होगी? (रुपये में)
RPF Constable 18/01/2019 (Evening)
(a) 740 (b) 750 (c) 760 (d) 770
हल :- $\frac{\text{क्रय मूल्य}}{1000} = \frac{100-10\%}{100+20\%} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ क्रय मूल्य = 750
Exam hall approach :-
क्रय मूल्य : विक्रय मूल्य : अंकित मूल्य
5 : 6
9 : 10
---
45 : 54 : 60
60 = 1000,
45 (क्रय मूल्य) = $\frac{1000}{60} \times 45 = 750$

@apna_pdf

Type - 5

शुद्ध लाभ /हानि प्रतिशत

नोट :- इस प्रकार के प्रश्न में, हमें क्रयमूल्य या विक्रय मूल्य की गणना करने की आवश्यकता नहीं है। हम सीधे क्रमिक सूत्र का उपयोग कर सकते हैं।

शुद्ध लाभ /हानि = M% - D% - $\frac{M\% \times D\%}{100}$

M% = अंकित मूल्य, D% = छूट

उदाहरण:- एक व्यापारी अपने माल पर क्रय मूल्य से 26% अधिक मूल्य अंकित करता है। वह अपने ग्राहक को अंकित मूल्य पर 12% की छूट देता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए ।

SSC CPO 2022 09/11/ 2022

(a) 10.88% (b) 11.08% (c) 10.50% (d) 10%

हल:- शुद्ध लाभ % = 26 - 12 - $\frac{26 \times 12}{100}$ = 14 - $\frac{312}{100}$

= 14 - 3.12 = 10.88%

उदाहरण:- एक दुकानदार अपने माल पर 30% अधिक मूल्य अंकित करता है और फिर अंकित मूल्य पर 10% की छूट देता है। इसके अलावा, वह एक दोषपूर्ण तराजू का उपयोग करता है जो 870 gm को 1 किलो दिखाता है। उसका शुद्ध लाभ प्रतिशत क्या है ?

SSC CHSL 2021 24/05/2022

(a) 38.42% (b) 34.84% (c) 34.48% (d) 38.24%

हल:- लाभ % = 30 - 10 - $\frac{30 \times 10}{100}$ = 20 - 3 = 17%

अनुपात → क्रय : विक्रय मूल्य

100 : 117

गलत वजन → 870 : 1000

---

29 : 39

शुद्ध लाभ % = $\frac{10}{29}$ × 100 = 34.48%

Exam Hall Approach :-

अनुपात → क्रय : विक्रय मूल्य

30% मार्कअप → 10 : 13

10% छूट → 10 : 9

गलत वजन → 870 : 1000

अंतिम → 87 : 117 या 29 : 39

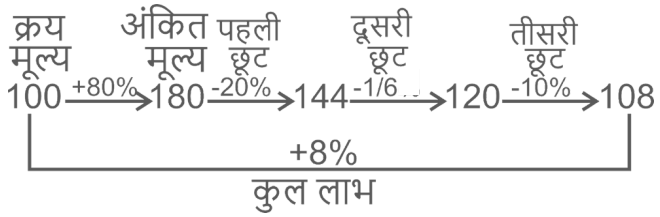
कुल लाभ % = $\frac{39-29}{29}$ × 100 = $\frac{10}{29}$ × 100 = 34.48%

Type - 6

क्रमिक छूट

(Successive Discount)

क्रमिक छूट और समग्र छूट :-



जब दो या दो से अधिक छूट दी जाती है तो उसे क्रमिक छूट कहा जाता है ।

सूत्र :- $(x + y - \frac{xy}{100})\%$

उदाहरण:- यदि 10% और 12% की दो क्रमिक छूटें दी जाती हैं, तो शुद्ध छूट क्या है ?

RRC Group D 22/09/2022 (Morning)

(a) 21.4% (b) 20.8% (c) 23.2% (d) 22.0%

हल :- शुद्ध छूट = 10 + 12 - $\frac{10 \times 12}{100}$ ⇒ 22 - 1.2 = 20.8%

Exam hall approach :

वि.मू.	:	क्र.मू
10	:	9
25	:	22
250	:	198

आवश्यक प्रतिशत = $\frac{250-198}{250}$ × 100 = 20.8%

उदाहरण:- 20%, 20% और 10% की लगातार तीन छूट के समतुल्य छूट क्या होगी ?

SSC CHSL 17/03/2018

हल:- एकल समतुल्य छूट ⇒ $(x + y + z - \frac{xy+yz+zx}{100} + \frac{xyz}{10000})\%$

⇒ $(20+20+10 - \frac{20\times20+20\times10+10\times20}{100} + \frac{20\times20\times10}{10000})\%$

⇒ $(50 - \frac{400+200+200}{100} + \frac{4000}{10000})\% = (50 - \frac{800}{100} + \frac{4000}{10000})\%$

⇒ (50 - 8 + 0.4)% = 42.4%

Exam hall Approach: 20% = $\frac{1}{5}$, 10% = $\frac{1}{10}$

एकल समतुल्य छूट. = $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{72}{125}$

= $\frac{72}{125}$ × 100 = 57.6%

अतः समतुल्य छूट = 100 - 57.6 = 42.4%

उदाहरण:- एक वस्तु का अंकित मूल्य ₹550 है। इसके अंकित मूल्य पर 15%, x% और 20% की तीन क्रमिक छूट देने के बाद इसे ₹317.90 में बेचा जाता है। यदि इसे 2x % की एकल छूट पर बेचा जाता है, तो इसका विक्रय मूल्य (₹ में) कितना होगा?

SSC GD Constable 17/11/2021 (Morning)

(a) 440 (b) 385 (c) 495 (d) 484

हल :- प्रश्न के अनुसार,

550 × $\frac{17}{20}$ × $\frac{4}{5}$ × x = 317.90

374x = 317.90 ⇒ x = $\frac{317.90}{374}$ = $\frac{17}{20}$

x = $\frac{20-17}{20}$ × 100 = $\frac{3}{20}$ × 100 = 15%

⇒ 2x = 30%

तो, एक वस्तु का आवश्यक विक्रय मूल्य = 550 × 70% = ₹385

Type - 7

व्यापार छूट और नकद छूट

व्यापार छूट और नकद छूट के सन्दर्भ में, पहले व्यापार छूट काट लें और फिर शेष राशि पर नकद छूट की गणना करें।

उदाहरण :- एक खुदरा विक्रेता अपने माल पर 25% की व्यापारिक छूट के बाद पहले से ही छूट वाले मूल्य पर 8% की नकद छूट देता है, और फिर भी क्रय मूल्य के 17.3% के बराबर शुद्ध लाभ अर्जित करता है। माल का अंकित मूल्य उसके क्रय मूल्य से कितने प्रतिशत अधिक रखा गया था?

RRC Group D 02/09/2022 (Morning)

@apna_pdf

(a) 50% (b) 60% (c) 75% (d) 70%

हल :-

माना : अंकित मूल्य = 100 ,

व्यापार छूट के बाद मूल्य $= 100 \times \frac{75}{100} = 75$

नकद छूट के बाद मूल्य $= 75 \times \frac{92}{100} = 69$

लागत मूल्य का 17.3% शुद्ध लाभ $= \frac{17.3}{100}$

तो , विक्रय मूल्य = 117.3 ⇒ 117.3 = 69

क्रय मूल्य $= \frac{69}{117.3} \times 100 = \frac{1000}{17}$

अंकित मूल्य - क्रय मूल्य ⇒ $100 - \frac{1000}{17} = \frac{700}{17}$

वस्तु के लागत मूल्य से प्रतिशत अधिक $= \frac{\frac{700}{17}}{\frac{1000}{17}} \times 100 = 70\%$

Exam hall approach :- लगातार दो छूट,

कुल छूट $= 25 + 8 - \frac{25 \times 8}{100} \Rightarrow 31\ \%$

$\frac{\text{क्रय मूल्य}}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{100 - \text{छूट}}{100 + \text{लाभ}} = \frac{100 - 31}{100 + 17.3} = \frac{69}{117.3}$

(अंकित मूल्य)	(क्रय मूल्य)
117.3	69
1173	690
17	10

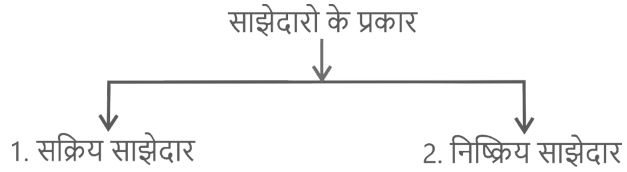
7

आवश्यक % $= \frac{7}{10} \times 100 = 70\ \%$

@apna_pdf

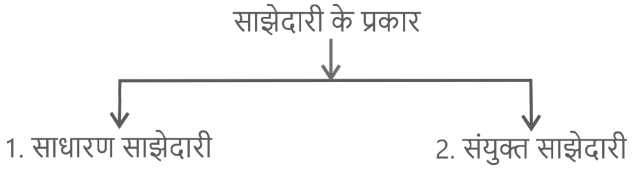
साझेदारी

जब दो या दो से अधिक व्यक्ति किसी व्यवसाय में लाभ प्राप्त करने के लिए शामिल होते हैं तो **साझेदारी** कहलाती है और व्यक्तियों को **साझेदार** कहा जाता है।



1. सक्रिय साझेदार : व्यवसाय का प्रबंधन करने वाले साझेदार को **सक्रिय साझेदार** या **कार्यशील साझेदार** के रूप में जाना जाता है।

2. निष्क्रिय साझेदार : एक साझेदार, जो केवल अपने धन को व्यवसाय में निवेश करता है, लेकिन इसे स्वेच्छा से प्रबंधित नहीं करता है, **निष्क्रिय** साझेदार कहलाता है।
साझेदारी फर्म को लाभ प्राप्त करने में मदद करने के लिए प्रत्येक साझेदार एक निश्चित समय के लिए कुछ धनराशि का निवेश करता है।



1. साधारण साझेदारी :– यदि सभी साझेदार एक ही अवधि के लिए अपनी अलग-अलग पूँजी (धन) का निवेश करते हैं या एक ही पूँजी को अलग-अलग अवधि के लिए निवेश करते हैं, तो ऐसी साझेदारी को साधारण साझेदारी कहा जाता है।

2. संयुक्त साझेदारी :– यदि सभी साझेदार अपनी अलग-अलग पूँजी (धन) अलग-अलग अवधि के लिए निवेश करते हैं तो ऐसी साझेदारी को संयुक्त साझेदारी कहते हैं।
संयुक्त साझेदारी में साझेदारों का लाभ न केवल उनके निवेश पर बल्कि समय अवधि पर भी निर्भर करता है।

*** Basics Terms/आवश्यक शब्दावली :-**
P = लाभ (Profit)
C = पूँजी (Capital)
I = निवेश (Investment)
T = समय (Time)

लाभ, पूँजी और समय के बीच संबंध

लाभ = पूँजी × समय

$P = C \times T$, $C = \frac{P}{T}$, $T = \frac{P}{C}$

उदाहरण:- X, Y और Z ने एक व्यवसाय में क्रमश: Rs.4,000, Rs.6,000 और Rs. 8,000 का निवेश किया। उन्होंने क्रमश: 3, 2 और 4 वर्षों के लिए धनराशि का निवेश किया। यदि कुल लाभ Rs.56,000 है, तो लाभ में Y का हिस्सा कितना है?
SSC CHSL 15/03/2023 (2nd Shift)
(a) Rs.18,000 (b) Rs.12,000 (c) Rs.15,000 (d) Rs.9,000
हल :-
अनुपात → X : Y : Z
राशि → 2 : 3 : 4
समय → 3 : 2 : 4

लाभ → 6 : 6 : 16
Y का हिस्सा = $56,000 \times \frac{6}{28}$ → Rs 12000

Type - 1

सक्रिय साझेदार और निष्क्रिय साझेदार

सक्रिय साझेदार को व्यवसाय के प्रबंधन के लिए लाभ से कुछ अतिरिक्त प्रतिशत मिलता है

उदाहरण:- एक व्यवसाय में A एक कामकाजी भागीदार है और B एक निष्क्रिय भागीदार है। A व्यवसाय में ₹30,000 का निवेश करता है और B ₹50,000 का निवेश करता है। A को व्यवसाय के प्रबंधन के लिए लाभ का 20% प्राप्त होता है और शेषराशि को उनकी पूंजी के अनुपात में विभाजित किया जाता है। ₹10,000 के लाभ से B का हिस्सा कितना है?
SSC CHSL 02/08/2023 (2nd Shift)
(a) ₹5,500 (b) ₹5,000 (c) ₹4,500 (d) ₹4,000
हल:- A को व्यवसाय के प्रबंधन के लिए लाभ का 20% प्राप्त होता है।
A के प्रबंधन लाभ को छोड़कर, शेष लाभ = 10,000 × 80% = 8,000
B का लाभ = $8,000 \times \frac{5}{8}$ = 5,000 Rs.

Type - 2

जब पूँजी निवेश , अलग-अलग समय अवधि के लिए समान हो

लाभ अनुपात = $P_1 : P_2 : P_3 = T_1 : T_2 : T_3$
{जहाँ P_1, P_2, P_3 लाभ है और T_1, T_2, T_3 समय है}

उदाहरण:- A और B प्रत्येक 10 लाख रूपये के साथ एक साझेदारी में प्रवेश करते हैं। 3 महीने के बाद, A अपनी पूंजी का आधा भाग निकाल लेता है, और फिर अन्य छह महीने के बाद इसे वापस भेज देता है। वर्ष के अंत में लाभ ₹ 14 लाख है, तो उसे कितना लाभ प्राप्त करना चाहिए ?
DDA ASO 18/09/2017 (Afternoon)
(a) ₹ 4 लाख (b) ₹ 10 लाख (c) ₹ 6 लाख (d) ₹ 3 लाख
हल :-
अनुपात → A : B
निवेश → 10 : 10

लाभ → {(10 × 3) + (5 × 6) + (10 × 3)} : (10 × 12)
⇒ 90 : 120 = 3 : 4
आवश्यक धन = $14 \times \frac{3}{3+4}$ = 6 लाख

Type - 3

जब विभिन्न पूँजी निवेश के लिए समय समान हो

लाभ अनुपात = $P_1 : P_2 : P_3 = C_1 : C_2 : C_3$
{जहां P_1, P_2, P_3 लाभ है और C_1, C_2, C_3 पूँजी है}

उदाहरण :-अमन और रवि ने क्रमश: 24000 रुपये और 8000 रुपये का निवेश 2 वर्ष की अवधि के लिए किया। 2 वर्ष के बाद, उन्होंने 24000 रुपये कमाई। इस कमाई में से अमन और रवि के शेयर कितने होंगे?

@apna_pdf

RRB Clerk Pre 07/08/2022 (2nd Shift)
(a) रु. 36,000, रु. 12,000
(b) रु. 18,000, रु. 6,000
(c) रु. 25,000, रु. 40,000
(d) रु. 20,000, रु. 12,000
(e) इनमें से कोई नहीं
हल :- लाभ का अनुपात = निवेश का अनुपात × समय
प्रश्न के अनुसार
अमन और रवि के लाभ का अनुपात
= 24000 × 2 : 8000 × 2 ⇒ 3 : 1
अमन का हिस्सा = $24000 \times \frac{3}{4}$ = Rs.18000
रवि का हिस्सा = $24000 \times \frac{1}{4}$ = Rs. 6000

Type - 4

(a) जब पूँजी निवेश X_1 , X_2 और X_3 अलग-अलग समय अवधि T_1 , T_2 और T_3 के लिए अलग-अलग होता है।

लाभ अनुपात = $P_1 : P_2 : P_3 = X_1T_1 : X_2T_2 : X_3T_3$

उदाहरण:-A, B और C ने निश्चित निवेश किए तथा उनकी कालावधि का अनुपात क्रमश: 3 : 2 : 7 है। A, B और C के लाभ का अनुपात क्रमश: 4 : 3 :14 है। A, B और C के निवेश का अनुपात क्या है?
SSC CGL Tier II (02/03/2023)
(a) 1 : 3 : 4 (b) 7 : 9 : 11 (c) 8 : 9 : 12 (d) 2 : 3 : 11
हल :- माना A, B और C का निवेश क्रमश: x, y, z है।
लाभ = कुल निवेश × कुल समय
अनुपात → A : B : C
लाभ → $3x : 2y : 7z = 4 : 3 : 14$
⇒ $x : y : z = \frac{4}{3} : \frac{3}{2} : \frac{14}{7}$ = 8 : 9 : 12

(b) जब अलग-अलग समय अवधि में अलग-अलग पूँजी निवेश की जाती है :-

मान लीजिए कि P और Q के बीच साझेदारी में P, C_1 रुपये का निवेश करता है T_1 की समयावधि के लिए। लेकिन Q, C_2 रु. का निवेश करता है T_2 की समयावधि के लिए और रु. C_3 , T_3 समयावधि के लिए।
लाभ अनुपात = $\{C_1 \times T_1 : (C_2 \times T_2 + C_3 \times T_3)\}$

उदाहरण :- A, B और C ने 8 : 6 : 5 के अनुपात में पूंजी के साथ एक व्यवसाय शुरू किया। 8 महीने के बाद A ने अपनी पूंजी का 25% निकाल लिया जबकि C ने अपने निवेश का 20% बढ़ा दिया, यदि वर्ष के अंत में व्यवसाय का कुल लाभ 28,000 रुपये होता है। तो C का लाभ हिस्सा क्या है?
IBPS RRB PO Pre 06/08/2023 (4th Shift)
(a) 12000 (b) 7000 (c) 4000
(d) 8000 (e) 6000
हल :- माना A, B और C की पूंजी क्रमशः $80R$, $60R$ और $50R$ है।
लाभ का अनुपात = निवेश का अनुपात × समय
प्रश्न के अनुसार
A, B और C के लाभ का अनुपात
= $(80R \times 8 + 60R \times 4) : (60R \times 12) : (50R \times 8 + 60R \times 4)$
⇒ 11 : 9 : 8
C का लाभ हिस्सा = $28,000 \times \frac{8}{28}$ = 8,000

Type - 5

जब कोई किसी व्यवसाय से जुड़ता है या छोड़ता है

उदाहरण:- अनिल और सुनील ने समान राशि का निवेश कर एक व्यवसाय शुरू किया। अनिल 9 महीने बाद चला गया। उन्होंने ₹ 28,000 का वार्षिक लाभ अर्जित किया। सुनील का वार्षिक लाभ में कितना हिस्सा है ?
RRC Group D 22/09/2022 (Morning)
(a) ₹16,000 (b) ₹15,000 (c) ₹13,000 (d) ₹12,000
हल:- अनिल : सुनील
निवेश → 1 : 1
समय → 9 : 12
लाभ → 3 : 4
कुल लाभ (4 + 3) = 7 इकाई → 28000 (दिया गया है)
इसलिए, सुनील का हिस्सा = $\frac{28000}{7} \times 4$ = ₹ 16000

उदाहरण :- राहुल और रमन ने क्रमश: Rs. 16000 और Rs. 12000 का निवेश करके एक व्यवसाय शुरू किया। 4 महीने बाद, राहुल ने व्यवसाय छोड़ दिया और मोहन Rs.20000 का निवेश करके व्यवसाय में शामिल हो गया। वर्ष के अंत में, Rs.46000 का लाभ हुआ। लाभ में मोहन का हिस्सा कितना होगा ?
SSC MTS 20/06/2023 (Afternoon)
(a) Rs. 28700 (b) Rs. 20000 (c) Rs. 36800 (d) Rs. 23400
हल :- अनुपात → राहुल : रमन : मोहन
निवेश → 16 : 12 : 20
समय → 4 : 12 : 8

लाभ → 4 : 9 : 10
लाभ (4 + 9 + 10) इकाई = रु. 46000
मोहन का हिस्सा (10) इकाई = $\frac{46000}{23} \times 10$ = रु 20000

Type - 6

(कर/दान आधारित)

उदाहरण:- A और B ने एक व्यवसाय में 7 : 5 के अनुपात में धन निवेश किया। यदि कुल लाभ का 15% दान के लिए जाता है और लाभ में A का हिस्सा Rs.5,950 है, तो कुल लाभ कितना है?
SSC CGL 18/07/2023 (4th shift)
(a) Rs.12,500 (b) Rs.12,000
(c) Rs.10,500 (d) Rs.11,750
हल:- माना A और B का निवेश $7x$ और $5x$ है।
यदि निवेश का समय बराबर है, तो लाभ के अनुपात निवेश के अनुपात के बराबर है।
प्रश्नों के अनुसार, $7x$ = 5950 रु.
$12x = 5950 \times \frac{12}{7}$ = 10200 रु.
कुल लाभ = $10200 \times \frac{100}{(100 - 15)}$ = 12000 रु.

@apna_pdf

साधारण ब्याज

साधारण ब्याज एक निश्चित दर पर और एक निश्चित अवधि के लिए किसी राशि पर लगाए गए ब्याज की मात्रा की गणना करने की एक विधि है।

कुछ महत्वपूर्ण शर्तें

1). मूलधन : मूलधन वह राशि है जिसे प्रारंभ में बैंक से उधार (ऋण) लिया जाता है या निवेश किया जाता है , इसे P से दर्शाया गया है।

2). दर : यह ब्याज की वह दर है जिस पर मूल राशि उधार ली जाती है या एक निश्चित समय के लिए दी जाती है, इसे R से दर्शाया जाता है।

3). समय : समय वह अवधि है जिसके लिए किसी को मूल राशि दी जाती है, समय को T से दर्शाया जाता है।

4). राशि : मूलधन और साधारण ब्याज का योग।

प्रमुख बिंदु :-

1. किसी राशि (मूलधन) पर T वर्षों के लिए R% प्रति वर्ष की दर से साधारण ब्याज इस प्रकार दिया जाता है:

साधारण ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

2. मूलधन (P) = $\frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$, समय (T) = $\frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{मूलधन}}$, दर (R) = $\frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$

3. मिश्रधन (A) = मूलधन + साधारण ब्याज

Type - 1

जब हमें साधारण ब्याज ज्ञात करना हो

उदाहरण :- ₹8,000 पर 10% वार्षिक दर से 6 वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 12/09/2023 (2nd Shift)
(a) ₹4,200 (b) ₹4,400 (c) ₹4,800 (d) ₹4,600
हल :-
6 वर्षों में कुल ब्याज = 6 × 10% = 60%
साधारण ब्याज = 8000 × 60% = ₹4,800
Exam hall approach :
1 → ब्याज
10 → मूलधन
10 इकाई → 8000 Rs.
6 इकाई → 4800 Rs.

जब हमें मिश्रधन ज्ञात करना हो

उदाहरण :- रमेश ने किसी बैंक में 5% वार्षिक साधारण ब्याज दर पर ₹1,232 की राशि निवेश की। 3 वर्ष बाद, उसे प्राप्त होने वाला मिश्रधन ज्ञात कीजिए ।
RRC Group D 22/08/2022 (Evening)
(a) ₹1,285.80 (b) ₹2,145.80 (c) ₹1,848.80 (d) ₹1,416.80
हल :-
मूलधन = ₹1232, दर% = 5%, समय = 3 वर्ष
साधारण ब्याज = $\frac{1232 \times 5 \times 3}{100}$ = ₹184.80
मिश्रधन = P + S.I = 1232 + 184.80 = ₹1,416.80
Exam hall approach :
3 वर्ष के लिए दर = 5 × 3 = 15% = $\frac{3}{20}$
20 इकाई = ₹1,232 ⇒ मिश्रधन (23 इकाई) = $\frac{1232}{20} \times 23$
मिश्रधन = ₹1,416.80

जब हमें राशि ज्ञात करना हो

उदाहरण :- 5.5% वार्षिक साधारण ब्याज पर एक धनराशि 4 वर्षों में ₹7,503 हो जाती है। धनराशि (₹ में) ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 14/09/2023 (3rd Shift)
(a) 5,350 (b) 6,150 (c) 5,980 (d) 5,520
हल :- साधारण ब्याज पर 4 वर्षों के लिए ब्याज = 5.5% × 4 = 22%
122% = ₹7503
(मूलधन) 100% = $\frac{7503}{122} \times 100$ = ₹6150

जब हमें समय ज्ञात करना हो

उदाहरण :- 12% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से कितने समय में ₹3,720 की राशि पर ₹5,282.4 मिश्रधन प्राप्त होगा ?
SSC CGL 27/07/2023 (3rd shift)
(a) 3 वर्ष (b) $3\frac{1}{2}$ वर्ष (c) $5\frac{1}{2}$ वर्ष (d) 5 वर्ष
हल :-
दर = 12% = $\frac{12}{100}$
मूलधन और मिश्रधन का अनुपात = 3,720 : 5,282.4 = 37200 : 52824
= 100 : 142
अब,
आवश्यक समय = $\frac{142 - 100}{12} = \frac{42}{12} = 3\frac{1}{2}$ वर्ष

जब हमें दर ज्ञात करना हो

उदाहरण :- किसी राशि पर प्राप्त 20 वर्षों का साधारण ब्याज उस राशि का $\frac{3}{5}$ है। वार्षिक ब्याज दर क्या है ?
SSC MTS 15/06/2023 (Morning)
(a) 3 प्रतिशत (b) 4 प्रतिशत (c) 5 प्रतिशत (d) 6 प्रतिशत
हल :- माना राशि 100 इकाई है।
प्रश्न के अनुसार,
साधारण ब्याज = 100 × $\frac{3}{5}$ = 60 इकाई
60 = $\frac{100 \times 20 \times r}{100}$ ⇒ ब्याज दर (r) = 3%

उदाहरण :- साधारण ब्याज पर ऋण दी गई एक निश्चित धनराशि 2 वर्षों में ₹12,600 और 4 वर्षों में ₹16,200 हो जाती है। वार्षिक प्रतिशत दर क्या है?
SSC MTS 11/09/2023 (3rd Shift)
(a) 25% (b) $12\frac{6}{7}$% (c) $17\frac{1}{2}$% (d) 20%
हल :- एक साल का ब्याज
= $\frac{16200 - 12600}{2}$ = 1800

@apna_pdf

मूलधन = 12600 – 1800 × 2
⇒ 12600 – 3600 = 9000
दर = $\frac{1800}{9000}$ × 100 = 20%

Exam hall approach :-

2 वर्ष ⟶ 12,600
4 वर्ष ⟶ 16,200
→ SI का अंतर = 3600

2 वर्ष का साधारण ब्याज = 3600
1 वर्ष का साधारण ब्याज = 1800
मूलधन = 12600 - 3600 = 9000
दर = $\frac{1800}{9000}$ × 100 = 20%

महत्वपूर्ण बिंदु :-

1). ध्यान दें कि, $SI = \frac{P \times R \times T}{100}$, सूत्र में हम सिर्फ P के $(T \times R)\%$ गणना कर रहे हैं।

2). साधारण ब्याज , वर्षो की संख्या के साथ रैखिक रूप से बढ़ता है अर्थात आप 1 वर्ष का साधारण ब्याज प्राप्त करने के लिए दिए गए ब्याज को वर्षो की संख्या से सीधे विभाजित कर सकते हैं।

उदाहरण :- यदि 4 साल के लिए साधारण ब्याज 400 रुपये है तो यह 2 साल के लिए 200 रुपये हो जाएगा।

Type - 2

* यदि एक निश्चित राशि साधारण ब्याज पर T वर्ष में स्वयं की n गुनी हो जाती है, तो -

R% = $\frac{(n-1)}{T}$ × 100

उदाहरण :- एक धनराशि प्रति वर्ष साधारण ब्याज पर 16 वर्षों में 7 गुना हो जाती है। वार्षिक ब्याज दर ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 05/09/2023 (3rd Shift)
(a) 25.8% (b) 39.2% (c) 20.3% (d) 37.5%
हल :-
R% = $\frac{(n-1)}{T}$ × 100 = $\frac{(7-1)}{16}$ × 100 ⇒ R = $\frac{600}{16}$ = 37.5%

* यदि एक निश्चित राशि साधारण ब्याज पर R% प्रतिवर्ष की दर से स्वयं का n गुना हो जाती है, तो -

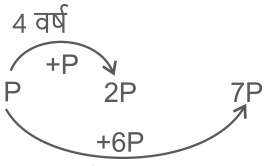
T = ($\frac{(n-1)}{R}$ × 100) वर्ष

उदाहरण :- साधारण ब्याज पर 14 प्रतिशत वार्षिक की दर से कम से कम कितने वर्षों में कोई धनराशि अपने से 4 गुना से अधिक हो जायेगी?
SSC MTS 10/05/2023 (Evening)
(a) 20 वर्ष (b) 25 वर्ष (c) 29 वर्ष (d) 22 वर्ष
हल :- राशि > 4 × मूलधन
तो ब्याज > 3P होना चाहिए
T > $\frac{(n-1)}{R}$ × 100 वर्ष
T > $\frac{(4-1)}{14}$ × 100 वर्ष = $\frac{150}{7}$ वर्ष = 21. 42 वर्ष
आवश्यक न्यूनतम पूर्ण वर्ष = 22 वर्ष

Type - 3

* जब मूलधन निश्चित समय में निश्चित दर पर n गुना हो जाता है

उदाहरण :- साधारण ब्याज पर कोई धनराशि 4 वर्ष में दोगुनी हो जाती है। कितने समय में समान ब्याज दर पर यह 7 गुना हो जाएगा?
SSC CHSL Tier II (26/06/2023)
(a) 25 वर्ष (b) 23 वर्ष (c) 24 वर्ष (d) 21 वर्ष
हल :- माना मूलधन = ₹x
प्रश्न के अनुसार,
4 वर्ष में साधारण ब्याज = ₹ x
6x ब्याज के लिए आवश्यक समय = 24 वर्ष
तो, 24 साल में पैसा 7 गुना हो गया
Exam hall approach :-



p → 4 वर्ष
6p → 6 × 4 वर्ष= 24 वर्ष

Type - 4

* साधारण ब्याज ∝ मूलधन, दर, समय

उदाहरण :- 8 वर्षों और 20 वर्षों के लिए समान ब्याज दर पर एक निश्चित राशि पर अर्जित साधारण ब्याज का अनुपात क्या होगा?
SSC MTS 16/05/2023 (Evening)
(a) 5 : 7 (b) 2 : 5 (c) 3 : 5 (d) 4 : 3
हल :- माना मूलधन = p, समय = t, दर = r%
साधारण ब्याज (S_1 , S_2)
$S_1 = \frac{p \times r \times 8}{100}$, $S_2 = \frac{p \times r \times 20}{100}$
आवश्यक अनुपात S_1 : S_2 = 8 : 20 = 2 : 5

Type - 5

* मूलधन का अलग - अलग दरों पर विभिन्न भागों में निवेश

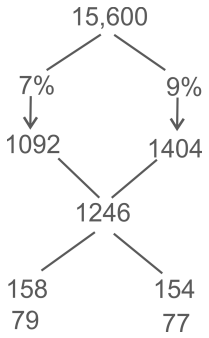
$\frac{p_1 \times r_1 \times t_1}{100} + \frac{p_2 \times r_2 \times t_2}{100}$ = SI

उदाहरण :- 15,600 रुपये की राशि का आंशिक भाग 7% प्रति वर्ष की दर से और शेष 9% प्रति वर्ष की साधारण ब्याज दर पर निवेश किया जाता है। यदि 3 वर्ष के अंत में कुल ब्याज 3,738 रुपये है। तब 7% प्रति वर्ष की दर से कितना पैसा निवेश किया गया?
SSC CPO 13/03/2019 (Morning)
(a) 7,800 (b) 7,900 (c) 7,600 (d) 7,700
हल :- माना कि 7% की दर से निवेश की गई राशि = x
प्रश्न के अनुसार,
$\frac{x \times 7 \times 3}{100} + \frac{(15600 - x) \times 9 \times 3}{100}$ = 3738
$7x + 140400 - 9x = 124600 \Rightarrow x = 7900$

Exam hall approach :-

1 वर्ष के लिए ब्याज = $\frac{3,738}{3}$ = Rs. 1246

@apna_pdf



(79 + 77) इकाई = 15,600 ⇒ 156 इकाई =15,600

7% (79 इकाई) पर निवेश की गई राशि $= \frac{15600}{156} \times 79$ = Rs. 7900

उदाहरण :- एक व्यक्ति ने 18,600 रूपये के मूलधन को x% वार्षिक ब्याज की दर से और पहले मूलधन के दोगुने मूलधन को (x + 2)% वार्षिक ब्याज की दर से निवेश किया, दोनों मूलधन साधारण ब्याज पर निवेशित हैं। यदि दोनों मूलधनों पर $3\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए अर्जित ब्याज 23,110.50 रूपये है, तो दूसरे निवेश पर वार्षिक ब्याज की दर कितनी है?
SSC CPO 11/12/2019 (Morning)
(a) 11% (b) 10.5% (c) 13% (d) 12.5%
हल :- हम जानते हैं कि,
x% पर 18,600 रुपये और (x + 2)% पर 37,200 रुपये
प्रश्न के अनुसार,

$\Rightarrow 18600 \times \frac{7}{2} \times \frac{x}{100} + 37200 \times \frac{7}{2} \times \frac{(x+2)}{100} = \frac{231105}{10}$

$\Rightarrow 186 \times \frac{7}{2}[x + 2x + 4] = \frac{231105}{10} \Rightarrow 3x + 4 = \frac{2201}{62}$

⇒ x = 10.5%
तो, दूसरी दर (x + 2)% = 12.5%

Type - 6

⋆ दर/समय में वृद्धि या कमी

उदाहरण :- एक साहूकार को पता चलता है कि ब्याज की वार्षिक दर में 18% से 15% की गिरावट के कारण, उसकी वार्षिक आय 750 रुपये कम हो जाती है। उसकी कुल आय है:
Selection Post 30/06/2023 (1st Shift)
(a) Rs.25,500 (b) Rs.25,000 (c) Rs.5,000 (d) Rs.2,500
हल :-
मूलधन × (दरों में अंतर) = 750 रु.
मूलधन × (18% - 15%) = 750 रु.

मूलधन = $\frac{750 \times 100}{3}$ = 25000 रु.

उदाहरण :- साधारण ब्याज पर ₹800 की धनराशि 3 वर्ष में ₹1,040 हो जाती है। यदि ब्याज दर में 3% की वृद्धि की जाती है, तो धनराशि ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 14/09/2023 (2nd Shift)
(a) ₹1,102 (b) ₹1,212 (c) ₹1,112 (d) ₹1,012
हल :- प्रश्न के अनुसार
साधारण ब्याज = 1040 - 800 = ₹ 240

साधारण ब्याज = $\frac{p \times r \times t}{100}$

240 = $\frac{800 \times r \times 3}{100}$ ⇒ (दर) r = 10%

नई दर = 10 + 3 = 13%

आवश्यक राशि = 800 + $\frac{800 \times 13 \times 3}{100}$ = ₹1,112

Exam hall approach :-
3 साल का ब्याज= 1040 - 800 = 240
1 वर्ष का ब्याज= 80

दर = $\frac{80}{800} \times 100$ = 10 %
बढ़ी हुई दर = 10 + 3 = 13 %
3 वर्षों के लिए बढ़ी हुई दर = 39 %

आवश्यक राशि = $\frac{139}{100} \times 800$ = ₹1,112

उदाहरण :- ₹P की धनराशि को 4 वर्षों के लिए एक निश्चित दर पर साधारण ब्याज पर रखा गया था। यदि इसे समान अवधि के लिए 6% अधिक दर पर रखा गया होता, तो इस पर ₹600 ब्याज अधिक प्राप्त होता। 2.5 P का मान क्या है?
SSC CHSL 10/08/2023 (4th Shift)
(a) ₹ 3,750 (b) ₹6,250 (c) ₹ 4,850 (d) ₹ 2,500
हल :- $\frac{\text{मूलधन} \times 6 \times 4}{100}$ = 600 ₹

मूलधन = $\frac{600}{24} \times 100$ = 2500 ₹

अब , 2.5 P = 2500 × 2.5 = 6250 ₹

Type - 7

क्रमिक ब्याज दर

उदाहरण :- किसी धनराशि पर पहले आठ वर्षों के लिए 7.25% प्रति वर्ष अगले छः वर्षों के लिए 8.5% और अंतिम चार वर्षों के लिए 6.5% की दर से साधारण ब्याज मिलता है। यदि इन अठारह वर्षों के दौरान अर्जित कुल ब्याज ₹35,100 था, तो निवेश की गई मूल राशि (₹ में) क्या थी ?
SSC CGL 20/07/2023 (2nd shift)
(a) 25,800 (b) 25,500 (c) 26,400 (d) 26,000
हल :- साधारण ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

प्रश्न के अनुसार,

35100 = $\frac{P \times 7.25 \times 8}{100} + \frac{P \times 8.5 \times 6}{100} + \frac{P \times 6.5 \times 4}{100}$

⇒ 35100 = $\frac{135P}{100}$ ⇒ P = 26000 रु.

Exam hall approach :-
पहले आठ वर्षों के लिए ब्याज = 7.25 × 8 = 58%
अगले छह वर्षों के लिए ब्याज = 8.5 × 6 = 51%
अंतिम चार वर्षों के लिए ब्याज = 6.5 × 4 = 26%
कुल ब्याज = 58 + 51 + 26 = 135%
121% = 35100

100% (मूल राशि) = $\frac{35100}{135} \times 100$ = = 26000 Rs

उदाहरण :- यदि क्रमागत वर्षों में साधारण ब्याज की दर क्रमशः 4% और 5% है, तो 2 वर्षों में ₹25,000 पर कुल देय धनराशि क्या होगी ?
SSC CHSL 04/08/2023 (1st Shift)
(a) ₹26,250 (b) ₹28,250 (c) ₹26,000 (d) ₹27,250
हल :- कुल ब्याज दर = 5 + 4 = 9%

कुल राशि = 25,000 × $\frac{109}{100}$ = ₹27,250

@apna_pdf

उदाहरण :- तान्या साबिर को साधारण ब्याज पर इस शर्त के साथ _____ रु.देती है कि ब्याज दर प्रति वर्ष 2% बढ़ जाएगी। 2 वर्ष के बाद कुल ब्याज रु. 10,240 और पहले वर्ष के लिए ब्याज दर 7% है।
SBI PO Pre 19/12/2022 (1st Shift)
(a) Rs.36,000 (b) Rs.38,000 (c) Rs.40,000
(d) Rs.42,000 (e) Rs.64,000
हल :- 2 वर्षों के लिए कुल ब्याज दर = 7% + 9% = 16%
⇒ 16% = 10,240
100%(मूलधन) = 64,000

Type - 8

जब साधारण ब्याज बराबर हो

उदाहरण:- ₹7,000 पर R% वार्षिक दर से 2 वर्षों में अर्जित साधारण ब्याज, ₹5,000 पर 5% वार्षिक दर से 14 वर्षों में अर्जित साधारण ब्याज के बराबर है। R का मान (प्रतिशत में) क्या है?
Matriculation Level 27/06/2023 (Shift - 1)
(a) 28% (b) 15% (c) 25% (d) 20%
हल:- साधारण ब्याज को बराबर करने पर

$:-\frac{7000 \times R \times 2}{100} = \frac{5000 \times 5 \times 14}{100}$

$R = \frac{5 \times 5 \times 14}{7 \times 2}$ = 25%

Type - 9

जब मिश्रधन बराबर हों

उदाहरण :- यदि A द्वारा 10% प्रति वर्ष की दर से तीन वर्षों के लिए ₹9,100 का निवेश करके प्राप्त की गई राशि, साधारण ब्याज पर, B द्वारा 8% प्रति वर्ष की दर से पांच साल के लिए एक निश्चित राशि का निवेश करके प्राप्त राशि के बराबर है।, तो B द्वारा निवेश की गई राशि का 90% (₹ में) है
SSC CGL Tier II (29/01/2022)
(a) 8,450 (b) 7,605 (c) 8,540 (d) 7,800
हल :- A द्वारा प्राप्त राशि ⇒

$9100 + \frac{9100 \times 10 \times 3}{100}$ = 11830

B द्वारा प्राप्त राशि = $P + \frac{P \times 8 \times 5}{100} = \frac{7}{5}P$

प्रश्न के अनुसार,

$11830 = \frac{7}{5}P \Rightarrow P = \frac{11830 \times 5}{7} = 8450$

8450 का 90% = 7605
Exam hall approach :-
माना, B द्वारा निवेश किया गया मूलधन P है
प्रश्न के अनुसार, 9100 × 1.3 = P × 1.4
P = 6500 × 1.3 = 8450 Rs.
90% of P = 8450 × 0.9 = 7605 Rs.

उदाहरण :- सुरेश ₹80000 प्रति वर्ष 24% साधारण ब्याज पर उधार लेता है और रमेश ₹91000 प्रति वर्ष 20% साधारण ब्याज पर उधार लेता है। कितने वर्षों में उनकी ऋण राशि बराबर हो जाएगी ?
NTPC CBT II (13/06/2022) 2nd Shift
(a) 22 (b) 20 (c) 11 (d) 10
हल :- प्रश्न के अनुसार,

$80,000 + \frac{80,000 \times 24 \times T}{100} = 91,000 + \frac{91,000 \times 20 \times T}{100}$

$= \frac{80,000 \times 24 \times T}{100} - \frac{91,000 \times 20 \times T}{100} = 11000$

=19,200T - 18200T = 11,000
⇒ 1000T = 11,000 ⇒ T = 11

वास्तविक छूट

उदाहरण :- 5% प्रति वर्ष साधारण ब्याज पर 2 वर्षों में देय ₹1,100 का वर्तमान मूल्य क्या है?
SSC CGL 26/07/2023 (3rd shift)
(a) ₹3,000 (b) ₹2,000 (c) ₹1,000 (d) ₹1,500
हल :- साधारण ब्याज = $\frac{P \times R \times T}{100}$
प्रश्न के अनुसार,

$1100 - P = \frac{P \times 5 \times 2}{100}$

$1100 - P = \frac{P}{10} \Rightarrow P = \frac{11000}{11}$ = 1000 रु.

@apna_pdf

चक्रवृद्धि ब्याज

चक्रवृद्धि ब्याज वह परिणामी ब्याज है जो मूल राशि और पिछली अवधियों से संचित ब्याज के संयोजन पर उत्पन्न होता है।

पैरामीटर	साधारण ब्याज	चक्रवृद्धि ब्याज
सूत्र	S.I. = $\frac{(P \times R \times T)}{100}$	C.I.= P$(1 + \frac{R}{100})^t$ - P
वापसी राशि	न्यूनतम	अधिकतम
मूल धन	स्थिर	उधार , अवधि के दौरान बदलता रहता है
लगाया गया ब्याज	मूल राशि पर ब्याज लगाया जाता है	मूलधन और संचित ब्याज पर ब्याज लगाया जाता है
वृद्धि	वृद्धि लागभग समान रहती है	वृद्धि काफी तेजी से बढ़ती है

प्रमुख बिंदु :-

1. एक वर्ष या एक अवधि के लिए साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज समान होता हैं।

2. साधारण ब्याज में आप एक वर्ष की ब्याज की गणना के लिए सालों की संख्या से साधारण ब्याज को विभाजित करते हैं, लेकिन चक्रवृद्धि ब्याज में यह लागू नहीं होता है।

3. चक्रवृद्धि ब्याज, मिश्रधन (मूलधन + ब्याज) पर ब्याज होता है; हम प्रतीक 'CI' का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण :- माना, एक व्यक्ति सालाना 10% की दर से 3 साल के लिए 100 रुपये का उधार लेता है। 3 सालों के बाद उसे कितनी राशि लौटानी होगी?

हल :- यहाँ इस प्रश्न को हल करने के लिए सन्निकटन विधि (approximation technique) है:

100 —10%→ 10 → 110 —10%→ 11 → 121 —10%→ 12.1 → 133.10

चक्रवृद्धि ब्याज होगा = 133.10 – 100
= 33.1 रु

या

उपरोक्त अवधारणा को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है:

मिश्रधन = $\frac{100 \times 110 \times 110 \times 110}{100 \times 100 \times 100}$ = 133.10

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

चक्रवृद्धि ब्याज = 133.10 – 100 = 33.10

या, मिश्रधन = मूलधन $(1 + \frac{r}{100})^t$

$= 100(1 + \frac{10}{100})^3$

$= 100 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = 133.10$

चक्रवृद्धि ब्याज = 33.10

नोट :- ध्यान दें कि चक्रवृद्धि ब्याज (CI) में, ब्याज की गणना प्रत्येक वर्ष के अंत में राशि पर की जाती है जबकि साधारण ब्याज (SI) में प्रत्येक वर्ष के लिए ब्याज की गणना मूल राशि पर की जाती है।

4. अगर ब्याज की दर हर वर्ष के लिए अलग है, जैसे, पहले वर्ष के लिए 10%, दूसरे वर्ष के लिए 20%, और तीसरे वर्ष के लिए 30%, तो मिश्रधन की गणना निम्नानुसार की जाएगी :

100 —10%→ 10 → 110 —20%→ 22 → 132 —30%→ 39.6 → 171.60

यह एक अन्य विधि द्वारा भी किया जा सकता है

मिश्रधन = $\frac{100 \times 110 \times 120 \times 130}{100 \times 100 \times 100}$ = ₹171.60.

चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करने की विभिन्न विधियाँ

चक्रवृद्धि ब्याज की समस्याओं को हल करने के लिए विभिन्न प्रकार की विधियाँ हैं। प्रश्नों में क्या पूछा गया है और प्रश्नों में किस प्रकार का डेटा है, इसके आधार पर हम विभिन्न तरीकों का उपयोग करते हैं। इसे हम उदाहरणों के माध्यम से आगे समझेंगे।

- सूत्र विधि
- ट्री विधि
- अनुपात विधि
- क्रमिक विधि

अब हम प्रत्येक विधि से एक प्रश्न लेंगे और उसे हल करने का प्रयास करेंगे।

सूत्र विधि :- हम इस सूत्र का उपयोग तब करते हैं जब हमें त्वरित उत्तर खोजने के लिए चक्रवृद्धि ब्याज और मूलधन दिया होता है।

चक्रवृद्धि ब्याज = राशि - मूलधन

राशि = मूलधन $(1 + \frac{r}{100})^t$

उदाहरण :- ₹3,240 की राशि पर दो वर्ष बाद वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज ₹370 है। दशमलव के दो स्थानों तक सही, ब्याज दर क्या है?

SSC MTS 02/11/2021 (Evening)

(a) 5.56% (b) 8.56% (c) 6.56% (d) 7.56%

हल :- हम जानते हैं कि,

$A = P(1 + \frac{r}{100})^t$

यहां P = 3240 और A = 3240 + 370 = 3610

$3610 = 3240 (1 + \frac{r}{100})^2$

$\Rightarrow \frac{3610}{3240} = (1 + \frac{r}{100})^2$

$\Rightarrow (1 + \frac{r}{100}) = \sqrt{\frac{3610}{3240}} = \frac{19}{18}$

$\Rightarrow (1 + \frac{r}{100}) = (1 + \frac{1}{18})$

$\Rightarrow r = \frac{100}{18}$

स्पष्टतः , r = 5.56%

Exam hall approach :- राशि = (3240 + 370) = ₹3610

अनुपात - मूलधन : राशि

3240 : 3610

$\sqrt{324}$: $\sqrt{361}$ = 18 : 19

दर % = $\frac{1}{18} \times 100$ = 5.56%

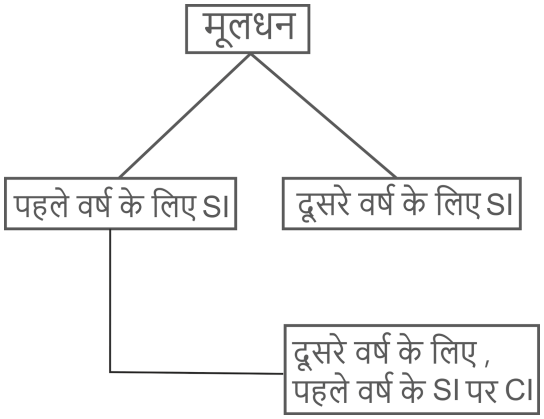
ट्री विधि

आजकल इस पद्धति का प्रयोग कम हो गया है। लेकिन यह विधि तब अधिक प्रभावी साबित होती है जब हम दूसरे और तीसरे वर्ष या तीसरे और चौथे वर्ष आदि के बीच CI का अंतर ज्ञात कर रहे होते हैं।

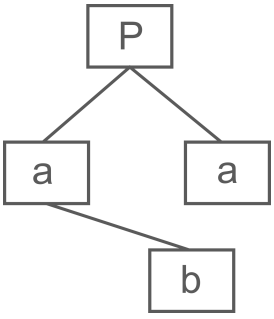
2 वर्ष के चक्र के लिए वृक्ष विधि संरचना

@apna.pdf

2 वर्षों के लिए चक्र वृक्ष समाधान संरचना

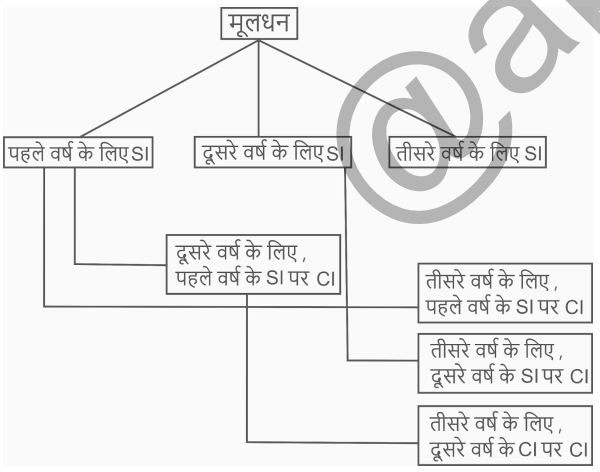


दो वर्ष के लिए

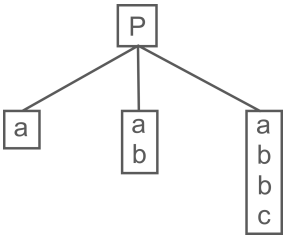


2 वर्ष का CI	a + a + b
2 वर्ष के बाद राशि	p + (2a + b)
2 वर्ष में CI और SI का अंतर	b
दूसरे वर्ष का CI	a + b

3 वर्ष के चक्र के लिए वृक्ष विधि संरचना



तीन चक्र के लिए



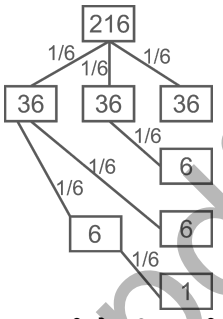
पहले वर्ष का ब्याज	a
दूसरे वर्ष का ब्याज	a + b
तीसरे वर्ष का ब्याज	a + 2b + c
3 वर्षों में SI	3a
3 वर्षों में CI	3a + 3b + c
3 वर्ष में CI और SI का अंतर	3b + c

उदाहरण :- यदि 3 वर्षों के लिए $16\frac{2}{3}\%$ की दर से एक निश्चित राशि पर तीसरे वर्ष और दूसरे वर्ष के लिए CI के बीच का अंतर 420 रुपये है, तो मूलधन ज्ञात करें।
(a) 12960 (b) 22060 (c) 32060 (d) 12560

हल :- $16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$

दर= $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$

माना मूलधन = 216 इकाई



दूसरे वर्ष और तीसरे वर्ष के CI का अंतर = (6 + 1) = 7 इकाई
प्रश्न के अनुसार,
7 इकाई = 420 ⇒ 1 इकाई = रु. 60
तो, मूलधन (216) इकाई = 216 × 60 = रु. 12960

अनुपात विधि

जब दरें भिन्न में दी गई हों तो हम अनुपात पद्धति को प्राथमिकता देते हैं
कुछ दर जैसे - $12\frac{1}{2}\%$, $16\frac{2}{3}\%$, $6\frac{1}{4}\%$

उदाहरण :- $6\frac{1}{4}\%$ वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्षों में मूल राशि ₹ 4,913 हो जाती है, जो वार्षिक रूप से संयोजित होती है:
Haryana CET 05/11/2022 (2nd Shift)
(a) ₹4,085 (b) ₹4,096 (c) ₹3,096 (d) ₹4,076

हल :- भिन्न $(6\frac{1}{4}\%) = \frac{1}{16}$

अनुपात	→	मूलधन :	राशि
प्रथम वर्ष	→	16 :	17
दूसरा वर्ष	→	16 :	17
तृतीय वर्ष	→	16 :	17

अंतिम अनुपात → 4096 : 4913
राशि = 4913 इकाई
4913 इकाई = ₹4913 ⇒ 1 इकाई = ₹1
तो, मूलधन (4096) इकाई = ₹4096

क्रमिक विधि

जब दर को भिन्न में बदलना कठिन होता है तो हम इस विधि को प्राथमिकता देते हैं। साथ ही प्रश्न की आवश्यकता के अनुसार, हम इस विधि का उपयोग वहां कर सकते हैं जहां अनुपात विधि को लागू करना थोड़ा कठिन है।
ऐसी दरें हैं - 3% , 6% , 7% , 17% , 30% आदि।

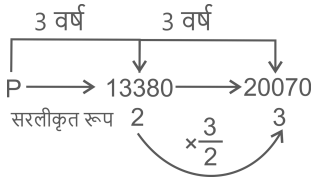
@apna_pdf

उदाहरण :- राम और दीप्ति ने प्रति वर्ष 30% चक्रवृद्धि ब्याज पर दो साल की अवधि के लिए ₹8000 की राशि का निवेश किया। हालाँकि, जहां राम के लिए ब्याज सालाना चक्रवृद्धि होता था, वहीं दीप्ति के लिए यह हर आठ महीने में चक्रवृद्धि होता था। दो वर्ष की अवधि के अंत में दीप्ति को राम की तुलना में कितना अधिक ब्याज मिलेगा?
NTPC CBT II (10/05/2022) 1st Shift
(a) ₹312 (b) ₹320 (c) ₹304 (d) ₹296
हल :- राम के लिए:
P = 8000, दर = 30%, समय = 2 वर्ष
राशि = $8000 \times \frac{13}{10} \times \frac{13}{10}$ = Rs. 13520
दीप्ति के लिए:
P = 8000, दर = $30 \times \frac{8}{12}\%$ = 20% = $\frac{1}{5}$
चक्र = $2 \times \frac{12}{8}$ = 3 (8 - 8 माह के 3 चक्र)
राशि = $8000 \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$ = रु. 13824
अंतर = 13824 - 13520 = रु. 304
Exam hall approach :- राम के लिए दर = 30%
30% की प्रभावी दर = 69% (2 वर्षों के लिए)
दीप्ति के लिए दर = $30 \times \frac{8}{12}\%$ = 20%
20% की प्रभावी दर = 72.8 (3 चक्र के लिए)
अंतर = 72.8% - 69 % = 3.8% = $8000 \times \frac{3.8}{100}$ = रु. 304

Type - 1

मूलधन ज्ञात करें

उदाहरण :- चक्रवृद्धि ब्याज पर निवेशित एक निश्चित धनराशि 3 वर्ष बाद ₹13,380 और 6 वर्ष बाद ₹20,070 हो जाती है, जबकि ब्याज की गणना वार्षिक चक्रवृद्धि आधार पर की जाती है। धनराशि ज्ञात कीजिए।
RRC Group D 23/08/2022 (Evening)
(a) ₹ 8,505 (b) ₹7,020 (c) ₹8,920 (d) ₹7,007
हल :-



एक मूलधन 3 साल बाद 13380 और 6 साल बाद 20070 हो जाता है।
13380 : 20070 ⇒ 2 : 3
$P \times \frac{3}{2} = 13380 \Rightarrow P = 2 \times 4460$
मूलधन = ₹8,920

Type - 2

दर ज्ञात करे

उदाहरण :- ₹14,375 की राशि, जब वार्षिक आधार पर चक्रवृद्धि r% ब्याज पर निवेश की जाती है, तो दो वर्षों के बाद ₹16,767 हो जाती है। r का मान ज्ञात कीजिए।
SSC CHSL 10/06/2022 (Evening)
(a) 9 (b) 6 (c) 7 (d) 8
हल :- मूलधन = 14,375. राशि = 16,767

$16,767 = 14,375 (1 + \frac{r}{100})^2$
$\Rightarrow \frac{16767}{14375} = (1 + \frac{r}{100})^2$
$\Rightarrow \frac{729}{625} = (1 + \frac{r}{100})^2 \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \frac{27}{25} \Rightarrow r = 8\%$
Exam Hall Approach :

मूलधन		राशि
14375	:	16767
625	:	729
25^2	:	27^2

ब्याज की दर = $\frac{2}{25} \times 100 = 8\%$

Type - 3

समय ज्ञात करे

उदाहरण :-10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कितने वर्षों में, ₹ 1,000, ₹1,331 हो जायेगा ?
UKPSC CSAT (03/04/2022)
(a) 2 (b) 2.5 (c) 3 (d) 3.5
हल :- प्रश्न के अनुसार,
$1331 = 1000 (1 + \frac{10}{100})^n$
$\frac{1331}{1000} = (\frac{11}{10})^n \Rightarrow (\frac{11}{10})^3 = (\frac{11}{10})^3$
इसलिए, n = 3 वर्ष
Exam hall approach:

मूलधन		राशि
1000	:	1331
सरलीकृत रूप		
10^3	:	11^3

यंहा T = 3 वर्ष

Type - 4

यदि पहले वर्ष, दूसरे, तीसरे वर्ष की ब्याज दरें r_1 , r_2 और r_3 इत्यादि हैं तो,

राशि = $P[1 + \frac{r_1}{100}] [1 + \frac{r_2}{100}] [1 + \frac{r_3}{100}]$---------- इत्यादि

उदाहरण :- 56000 रुपये का निवेश पहले वर्ष के लिए 5% की दर से, दूसरे वर्ष के लिए 10% की दर से और तीसरे वर्ष के लिए 15% की दर से किया जाता है। इन 3 वर्षों में अर्जित कुल चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
AFCAT 12/02/2022 (1st Shift)
(a) Rs.18283 (b) Rs.18382 (c) Rs.18832 (d) Rs.18238
हल :- मूलधन = रु. 56000
राशि = $56000 \times (1 + \frac{5}{100}) \times (1 + \frac{10}{100}) \times (1 + \frac{15}{100})$
राशि = $56000 \times \frac{105}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{115}{100}$ = Rs 74382
अब , CI = A - P = 18382

Type - 5

CI और SI के बीच अंतर

1. 2 वर्षों के लिए CI और SI का अंतर = $(CI - SI)_{2\text{वर्ष}} = P (\frac{R}{100})^2$

@apna_pdf

2. 3 वर्षों के लिए CI और SI का अंतर = $(CI - SI)_{\text{3वर्ष}}$

= P $(\frac{R}{100})^2 (\frac{300+R}{100})$

= $(CI - SI)_{\text{3वर्ष}} \times 100^3 = PR^2 (300 + R)$

जहां, P = मूलधन , R = ब्याज की दर

उदाहरण :- एक निश्चित राशि पर 10% प्रति वर्ष की दर पर दो वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज में अंतर Rs.250 है। वह राशि ज्ञात करें।

SSC CPO 09/11/2022 (Morning)

(a) Rs.25,450 (b) Rs.26,550 (c) Rs.25,000 (d) Rs.26,000

हल :- हम जानते है

2 वर्षों के लिए CI और SI का अंतर = $(CI - SI)_{\text{2वर्ष}}$ = P $(\frac{R}{100})^2$

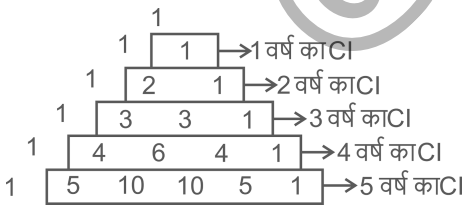
प्रश्न के अनुसार

250 = P $(\frac{10}{100})^2 \Rightarrow 250 = P(\frac{10 \times 10}{100 \times 100}) \Rightarrow$ P = Rs.25000

2 वर्ष या चक्र के लिए		
दर	**चक्रवृद्धि ब्याज (CI)**	**CI - SI**
5%	**10.25%**	**0.25%**
10%	**21%**	**1%**
15%	**32.25%**	**2.25%**
20%	**44%**	**4%**
25%	**56.25%**	**6.25%**
30%	**69%**	**9%**
3 वर्ष या चक्र के लिए		
दर	**चक्रवृद्धि ब्याज (CI)**	**CI - SI**
5%	**15.76%**	**0.76%**
10%	**33.10%**	**3.10%**
15%	**52.09%**	**7.09%**
20%	**72.80%**	**12.80%**
25%	**95.31%**	**20.31%**
30%	**119.70%**	**29.70%**

Type - 6

CI का पास्कल नियम



उदाहरण :- एक निश्चित राशि पर 3 वर्ष के लिए 12% प्रति वर्ष की दर से साधारण ब्याज 6750 रुपये है। यदि ब्याज अर्ध-वार्षिक रूप से संयोजित होता है, तो उसी राशि पर 2 वर्षों के लिए 20% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज (रुपये में) क्या है? (निकटतम रुपये तक पूर्णांकित करें)

SSC CHSL 2020 (Held on : 12 april 2021 shift 3)

(a) 7729 (b) 8702 (c) 8000 (d) 6750

हल :- दर = 12%

3 वर्षों के लिए साधारण ब्याज (मूलधन का 36%) = 6750 रु.

मूलधन(100%) = $\frac{6750}{36} \times 100$ = 18750.

अब, नई दर = $\frac{20}{2}$ = 10%

समय = 2 × 2 = 4 चक्र

चार साल ⇒ कोड

18750 का 10% 1875 → **4**
1875 का 10% 187.5 → **6**
187.5 का 10% 18.75 → **4**
18.75 का 10% 1.875 → **1**

कुल चक्रवृद्धि ब्याज = (4 × 1875) +(6 × 187.5) + (4 × 18.75) + 1.875

= 8701.875 ≈ 8702

Type - 7

गुणन कारक
(Multiplying Factor)

(a) यदि कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर 't' वर्ष में 'n' गुना हो जाती है, तो उसी राशि के लिए 'n^x' गुना होने में लगने वाला समय 't × x' वर्ष के बराबर होता है।

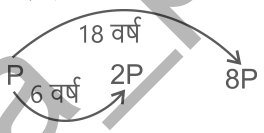
उदाहरण :- यदि एक निश्चित राशि वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की स्थिति में चक्रवृद्धि ब्याज पर 6 वर्षों में स्वयं की दोगुनी हो जाती है, तो वार्षिक चक्रवृद्धि के तहत समान ब्याज दर पर कितने वर्षों में वह स्वयं की आठ गुना हो जाएगी:

RRC Group D 09/09/2022 (Morning)

(a) 18 वर्ष (b) 36 वर्ष (c) 24 वर्ष (d) 12 वर्ष

हल :- 6 वर्ष में राशि 2 गुना हो जाती है . यह 8 गुना हो जायेगा

= $(2^3) \rightarrow 6 \times 3 = 18$ वर्ष



(b) यदि कोई राशि 'P', CI पर 't' वर्षों में स्वयं का 'x' गुना हो जाती है, तो

दर % = $[x^{\frac{1}{t}} - 1] \times 100$

उदाहरण :- किस दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर कोई धनराशि 2 वर्षों में स्वयं 2.25 गुना हो जाती है?

हल :- हम जानते है

दर % = $[x^{\frac{1}{t}} - 1] \times 100$

प्रश्न के अनुसार

दर % = $[2.25^{\frac{1}{2}} - 1] \times 100$

दर % = [1.5 - 1] × 100

दर % = [0.5] × 100 = 50 %

(c) चक्रवृद्धि ब्याज पर यदि राशि 'a' वर्ष में A और 'b' वर्ष में B हो जाती है, तो,

1. यदि b - a = 1 है, तो R% = $(\frac{B}{A} - 1) \times 100\%$

2. यदि b - a = 2 है, तो R% = $(\sqrt{\frac{B}{A}} - 1) \times 100\%$

3. यदि b - a = 3 है, तो R%= $(\sqrt[3]{\frac{B}{A}} - 1) \times 100\%$

4. यदि b - a = n है, तो R% = $[(\frac{B}{A})^{\frac{1}{n}} - 1)] \times 100\%$

उदाहरण :- वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर एक धनराशि 3 वर्षों में ₹6,400 और 5 वर्षों में ₹8,100 हो जाती है। प्रति वर्ष ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

SSC MTS 01/09/2023 (2nd Shift)

@apna_pdf

(a) $12\frac{3}{8}\%$ (b) $12\frac{1}{2}\%$ (c) $12\frac{6}{8}\%$ (d) $12\frac{5}{8}\%$

हल :- $6400 = P(1 + \frac{r}{100})^3$ ....(समी.1)

$8100 = P(1 + \frac{r}{100})^5$ ....(समी. 2)

समीकरण (2) को समीकरण (1)से विभाजित करने पर हमें प्राप्त होता है

$(1 + \frac{r}{100})^2 = \frac{81}{64}$

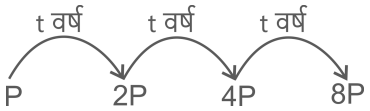
$(1 + \frac{r}{100}) = \frac{9}{8} \Rightarrow r = 12\frac{1}{2}\%$

Exam hall approach :- a = 3 , b = 5 ⇒ b - a = 2

तो , $R\% = (\sqrt{\frac{8100}{6400}} - 1) \times 100\% = \frac{1}{8} \times 100\% = 12\frac{1}{2}\%$

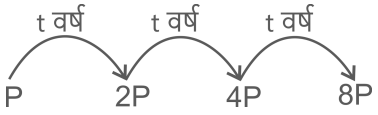
(d) दोहरा धन नियम या 69 नियम या 72 नियम :

69 नियम :- जब दर $R\%$ हो ।



तब , समय **(t)** = $(\frac{69}{R} + 0.37)$ वर्ष

72 नियम:- जब दर $R\%$ हो ।



तब ,समय **(t)** = $\frac{72}{R}$ वर्ष

नोट :- 69 नियम 72 नियम की तुलना में अधिक सटीक परिणाम देता है।

उदाहरण :- एक निश्चित राशि को 26% की वार्षिक ब्याज दर पर निवेश किया जाता है, जिस पर ब्याज वार्षिक रूप में चक्रवृद्धि होता है। यह राशि कितने वर्षों में (लगभग) दोगुनी हो जाएगी ?
SSC CHSL 01/06/2022 (Morning)
(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 5
हल :- 69 नियम का प्रयोग करने पर :-

समय (t) = $(\frac{69}{R} + 0.37)$ वर्ष

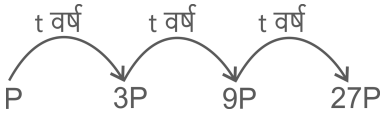
अतः , समय = $\frac{69}{26} + 0.37 = 2.65 + 0.37 = 3$ वर्ष (लगभग)

72 नियम का प्रयोग करने पर :-

समय (t) = $\frac{72}{R}$ वर्ष = $\frac{72}{26}$ वर्ष = 2.77 वर्ष = 3 वर्ष (लगभग)

(e) ट्रिपल मनी नियम या 114 नियम :

114 नियम :- जब दर $R\%$ हो ।



तब ,समय **(t)** = $\frac{114}{R}$ वर्ष

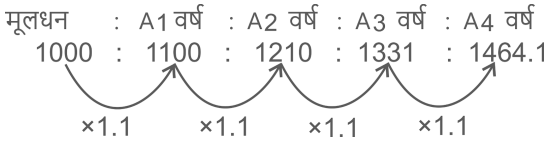
Type - 8

माना मूलधन = 1000, दर = 10% प्रति वर्ष
समय = 4 वर्ष

दर = 10% प्रति वर्ष और $\frac{1}{10}$

इसलिए हम कह सकते है मूलधन = 10 और मिश्रधन = 11

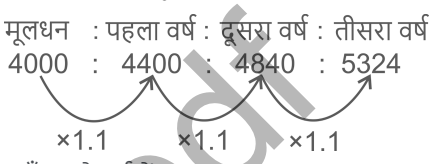
गुणन कारक = $\frac{11}{10}$ = 1.1



उदाहरण :- 4000 रुपये की राशि 10% प्रति वर्ष ब्याज दर पर उधार दी गयी है , ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है। दूसरे वर्ष और तीसरे वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज के बीच क्या अंतर है?
SSC MTS 08/10/2021 (Morning)
(a) Rs.45 (b) Rs.46.50 (c) Rs.45.40 (d) Rs. 44
हल :- हम जानते है

दर = 10% प्रति वर्ष और $\frac{1}{10}$

गुणन कारक = $\frac{11}{10}$ = 1.1



यहाँ , दूसरे वर्ष में CI = 4840 - 4400 = Rs.440
तीसरे वर्ष में CI = 5324 - 4840 = Rs. 484
इसलिए , दूसरे वर्ष और तीसरे वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज (CI) के बीच का अंतर = 484 - 440 = Rs. 44

Exam hall Approach :
दूसरे वर्ष और तीसरे वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज (CI) के बीच का अंतर =

$4000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10} = 44$

Hint : $4000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} - 4000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10}$

$4000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} [\frac{11}{10} - 1]$

$4000 \times \frac{1}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10}$ = Rs. 44

Type - 9

जब दर मासिक रूप से संयोजित होती है

महत्वपूर्ण सूत्र :

मिश्रधन = A , मूलधन = P , चक्रवृद्धि ब्याज = CI , ब्याज दर = R
समय अवधि = n (चक्रों की संख्या)

1. चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन - मूलधन

2. जब ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है,

A (चक्रवृद्धि ब्याज पर) = $P(1 + \frac{R}{100})^n$

3. जब ब्याज अर्धवार्षिक रूप से संयोजित होता है,

A (चक्रवृद्धि ब्याज पर) = $P(1 + \frac{\frac{R}{2}}{100})^{2n}$

4. जब ब्याज त्रैमासिक रूप से संयोजित होता है,

A (चक्रवृद्धि ब्याज पर) = $P(1 + \frac{\frac{R}{4}}{100})^{4n}$

@apna_pdf

5. जब ब्याज प्रतिमास संयोजित होता है,

A (चक्रवृद्धि ब्याज पर) = $P(1 + \frac{\frac{R}{12}}{100})^{12n}$

6. जब ब्याज वार्षिक रूप से संयोजित होता है और समयावधि भिन्न में दी जाती है, $3\frac{2}{5}$ वर्षों के लिए :

A (चक्रवृद्धि ब्याज पर) = $P(1 + \frac{R}{100})^3 \times (1 + \frac{\frac{2}{5}R}{100})$

7. जब अलग-अलग वर्षों के लिए अलग-अलग ब्याज दरें दी जाती हैं, तो क्रमशः पहले, दूसरे, तीसरे और चौथे वर्ष के लिए ब्याज दरें हैं, $R_1\%$, $R_2\%$, $R_3\%$, और $R_4\%$:

A (चक्रवृद्धि ब्याज पर) =

$P(1 + \frac{R_1}{100}) \times (1 + \frac{R_2}{100}) \times (1 + \frac{R_3}{100}) \times (1 + \frac{R_4}{100})$

8. समान मासिक किस्त (**EMI**) की अवधारणा :

उधार ली गई राशि = $\frac{x}{(1 + \frac{R}{100})^n}$

जहां x = किस्त (EMI)

9. जब ब्याज 8 मासिक चक्रवृद्धि होता है, समय अवधि 2 वर्ष है और ब्याज दर 12% प्रति वर्ष है, तो 12 महीने के लिए ब्याज दर = 12%, तो 8 महीने के लिए ब्याज दर = $\frac{8 \times 12}{12}$ = 8%

यहाँ, समय अवधि = 2 वर्ष = 24 महीने

इसलिए, $\frac{24}{8}$ = 3 , अब हमें आवश्यक चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करने के लिए 8% ब्याज दर के 3 चक्रों का संचालन करने की आवश्यकता है।

जब दर संयोजित होती है -	दर(r)	समय(t)
वार्षिक	R%	t वर्ष
अर्धवार्षिक	$\frac{R}{2}\%$	2t वर्ष
आठ मासिक	$\frac{2R}{3}\%$	$\frac{3}{2}$t वर्ष
त्रैमासिक	$\frac{R}{4}\%$	4t वर्ष
मासिक	$\frac{R}{12}\%$	12t वर्ष

10. दो ब्याज दरों के लिए

प्रभावी चक्रवृद्धि ब्याज (CI) दर = $(a + b + \frac{ab}{100})\%$,

जहां a और b ब्याज दरें हैं।

यदि a = b , 2 साल के चक्र के लिए = $2a + \frac{a^2}{100}$

i.e. 2% और 5% = $(2 + 5 + \frac{2 \times 5}{100})\%$, = 7 + 0.1 = 7.1 %

i.e. 3% और 3% = $2 \times 3 + \frac{3^2}{100}$ = 6 + 0.09 = 6.09%

11. तीन ब्याज दरों के लिए प्रभावी चक्रवृद्धि ब्याज (CI) दर

= $(a + b + c + \frac{ab + bc + ca}{100} + \frac{abc}{10000})\%$, जहां a, b और c ब्याज दरें हैं।

यदि a = b = c तो ब्याज दर = $(3a + \frac{3a^2}{100} + \frac{a^3}{10000})\%$ = 3a | $3a^2$| a^3

i.e. 5% , 5% और 5% = $3 \times 5 + \frac{3 \times 5^2}{100} + \frac{5^3}{10000}$ = 15.7625%

या 3 × 5 | 3×5^2| 5^3 = 15 | 75 | 125 = 15.7625%

i.e. 10% , 10% और 10% = $3 \times 10 + \frac{3 \times 10^2}{100} + \frac{10^3}{10000}$ = 33.10%

या 3 × 10 | 3×10^2| 10^3 = 30 | 3 0 0 | 1 0 0 0

= 33.1000 = 33.10

12. प्रभावी दर :-

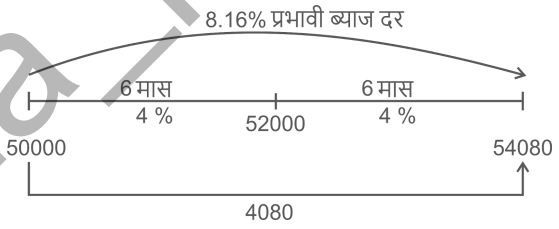
साल → / दर ↓	2nd	3rd	4th
5%	10.25%	15.7625%	21.550625%
10%	21%	33.1%	46.41%
15%	32.25%	52.0875%	-
20%	44%	72.8%	107.36%
25%	56.25%	95.3125%	-
30%	69%	119.70%	-

उदाहरण :- अर्धवार्षिक रूप से सयोंजित होने पर एक वर्ष के लिए ₹50,000 पर 8% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

SSC CHSL 02/08/2023 (2nd Shift)

(a) ₹3,900 (b) ₹3,880 (c) ₹4,080 (d) ₹3,950

हल :-



प्रभावी ब्याज दर = $4 + 4 + \frac{4 \times 4}{100}$ = 8.16%

चक्रवृद्धि ब्याज = 50,000 × $\frac{8.16}{100}$ = Rs.4080

उदाहरण :- 25000 रुपये पर 12% प्रति वर्ष की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज (1 रुपये के निकटतम) क्या होगा यदि ब्याज की चक्रवृद्धि 8 माह की है ?

SSC CGL 04/06/2019 (Evening)

(a) Rs 6,394 (b) Rs 6,439 (c) Rs 6,493 (d) Rs 6,349

हल :- ब्याज की चक्रवृद्धि 8 माह है।

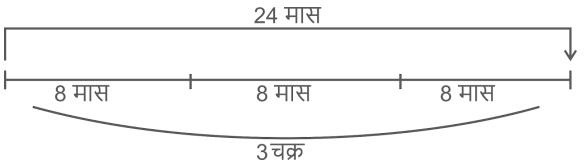
तो, प्रभावी ब्याज दर = 12 × $\frac{8}{12}$ = 8%

या 12 मास = 12 % ,

इसलिए 8 मास = 8 %

समय की प्रभावी अवधि = 2 × $\frac{12}{8}$ = 3

या 2 वर्ष = 24 मास



8% का भिन्नात्मक मान = $\frac{2}{25}$

तीन चक्रवृद्धि चक्र (compounding cycle)के लिए :-

मूलधन : राशि

@apna_pdf

$(25)^3$: $(27)^3$

15625 : 19683

अब , 15625 इकाई = Rs.25000

1इकाई = Rs.1.6

चक्रवृद्धि ब्याज = (19683 -15625)

= 4058 इकाई

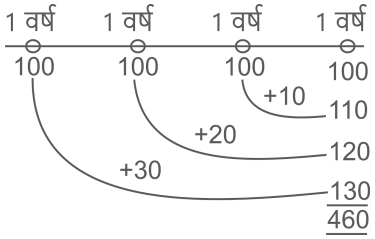
चक्रवृद्धि ब्याज ⇒ 4058 × 1.6 ≈ Rs.6493

@apna_pdf

किश्तें

साधारण ब्याज किश्तें

यदि एक राशि का भुगतान 4 वर्षों में 10% साधारण ब्याज पर 100 रुपये की समान किश्तों में किया जाता है
तब



पहली किश्त पूरी होगी = 130
दूसरी किश्त पूरी होगी = 120
तीसरी किश्त पूरी होगी = 110
चौथी किश्त पूरी होगी = 100

460

अत: चार वर्षों में 100 रुपये की चार समान किस्तों से चुकाया गया कुल ऋण = 460

महत्वपूर्ण सूत्र

SI के मामले में वार्षिक किस्त = $\frac{100A}{100t + \frac{rt(t-1)}{2}}$

जहां, A = उधार ली गई राशि,
t = समय अवधि (किश्त की संख्या), r = ब्याज दर

उदाहरण 1 :- एक कंप्यूटर नकद भुगतान पर ₹39,000 या नकद भुगतान के रूप में ₹19,000 और उसके बाद ₹4,200 प्रत्येक की पांच मासिक किस्तों पर उपलब्ध है। किस्त योजना के अंतर्गत प्रतिवर्ष ब्याज दर क्या है?
SSC CHSL 02/08/2023 (2nd Shift)
(a) $20\frac{19}{29}\%$ (b) $20\frac{17}{29}\%$ (c) $20\frac{20}{29}\%$ (d) $20\frac{18}{29}\%$

हल :-
शेष राशि = 39,000 – 19,000 = 20,000 ₹

राशि = $20{,}000 + \frac{20{,}000 \times R \times 5}{12 \times 100} = 20{,}000 + \frac{250R}{3}$

इन किस्तों की रकम का योग
(4200 + 4200 पर 4 महीने के लिए S.I.) + (4200 + 3 महीने के लिए 4200 पर S.I.) + (4200 + 4200 पर 2 महीने के लिए S.I.) + (4200 + 4200 पर 1 महीने के लिए S.I.) + 4200
= (4200 × 5) + (4200 पर 10 महीने के लिए S.I.)

$= 21000 + \frac{4200 \times R \times 10}{12 \times 100} = 21000 + 35R$

अब, राशि बराबर करने पर :-

$20{,}000 + \frac{250R}{3} = 21000 + 35R$

$\Rightarrow \frac{145R}{3} = 1{,}000 \Rightarrow R = \frac{3000}{145} = \frac{600}{29} = 20\frac{20}{29}\%$

उदाहरण 2 :- कौन सी वार्षिक किस्त 12% साधारण ब्याज पर 4 वर्षों में ₹5,664 का भुगतान करेगी?
SSC CGL 02/12/2022 (3rd Shift)
(a) ₹1,230 (b) ₹1,210 (c) ₹1,200 (d) ₹1,220

हल:- सूत्र का उपयोग करके,

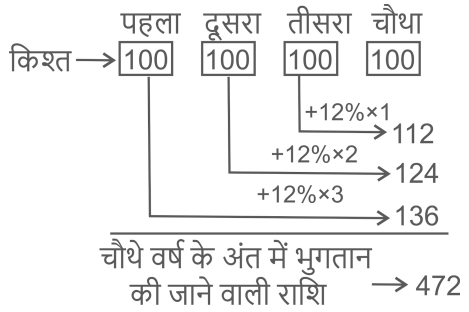
$x = \frac{100A}{100t + \frac{rt(t-1)}{2}}$

.....(जहाँ A = उधार ली गई राशि, r = दर और t = किश्तों की संख्या)

$x = \frac{566400}{100 \times 4 + \frac{12 \times 4(4-1)}{2}} = \frac{566400}{100 \times 4 + 72} = \frac{566400}{472}$

= Rs. 1200

Exam hall approach :-



प्रश्न के अनुसार,
472 इकाई = रु. 5664
फिर , 100 इकाई = रु. 1200

चक्रवृद्धि ब्याज किस्त

1) समान मासिक किस्त (EMI) :-

उधार ली गई राशि = $\frac{x}{(1 + \frac{R}{100})^n}$, जहां x = किस्त (EMI)

उदाहरण:- 10% चक्रवृद्धि ब्याज दर पर 2 वर्षों में ₹2,10,000 का ऋण चुकाने के लिए प्रत्येक वर्ष भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

हल:- $210000 = \frac{x}{(1 + \frac{10}{100})^2} + \frac{x}{(1 + \frac{10}{100})}$

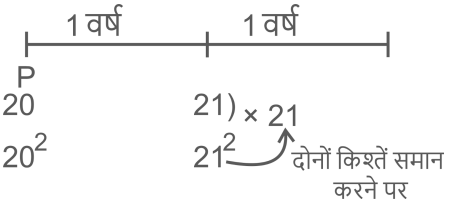
$\Rightarrow 210000 = \frac{x}{(\frac{11}{10})^2} + \frac{x}{(\frac{11}{10})}$

$\Rightarrow 210000 = \frac{100x}{121} + \frac{10x}{11} \Rightarrow 210000 = \frac{100x + 110x}{121}$

$\Rightarrow 210000 = \frac{210x}{121} \Rightarrow x$ = ₹1,21,000

2) चक्रवृद्धि ब्याज की किश्तें :-

यदि कोई राशि दो वर्षों के लिए 5% चक्रवृद्धि ब्याज दर पर दो समान किस्तों में देय है



उदाहरण:- 10% चक्रवृद्धि ब्याज दर पर 2 वर्षों में ₹2,10,000 का ऋण चुकाने के लिए प्रत्येक वर्ष भुगतान की जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए।

हल:- दिया गया R = 10% = $\frac{1}{10}$

	मूलधन	:	किश्त
प्रथम वर्ष -	$10_{\times 11}$	:	$11_{\times 11}$
दूसरा वर्ष -	10^2	:	11^2
	210	:	242

@anna_pdf

प्रत्येक किश्त (प्रति वर्ष) = 121 इकाई
मूलधन(210 इकाई) = ₹2,10,000
अब, आप प्रत्येक वर्ष भुगतान की जाने वाली आवश्यक राशि यानी 121 इकाई की गणना कर सकते हैं
$= \frac{210000}{210} \times 121 =$ ₹1,21,000

@apna_pdf

मिश्रण और पृथकीकरण

मिश्रण :- जब दो या दो से अधिक पदार्थों को किसी अनुपात में मिलाकर एक उत्पाद बनाया जाता है तो उसे मिश्रण कहते हैं।

माध्य मूल्य :- ज्ञात वस्तुओं की सभी दी गई कीमतों का औसत।

सूत्र

1) तरल A के x लीटर में से p लीटर निकाला जाता है और उतनी ही मात्रा में तरल B मिलाया जाता है। पुनः मिश्रण से, q लीटर मिश्रण निकाला जाता है और समान मात्रा में तरल B मिलाया जाता है। फिर मिश्रण से r लीटर निकाल लिया जाता है और उतनी ही मात्रा में तरल B मिलाया जाता है

अंतिम मिश्रण में, तरल A = $x(\frac{x-p}{x})(\frac{x-q}{x})(\frac{x-r}{x})$.....

⇒ अंतिम मिश्रण में तरल B = x - (अंतिम मिश्रण में तरल A)

2.) चीनी और पानी के मिश्रण की 'a' इकाई में x% पानी है। वाष्पीकृत जल की मात्रा इस प्रकार दी गई है कि जल के प्रतिशत में कमी x% से y% तक हुई है

वाष्पित जल की आवश्यक मात्रा = $\frac{a(x-y)}{y}$ इकाई

3.) 'M' लीटर मिश्रण में दूध की मात्रा x% है। इसमें कितना पानी मिलाया जाए कि दूध की प्रतिशत मात्रा y% हो जाए?

पानी की मात्रा = $\frac{M(x-y)}{y}$

मिश्रण (मिश्रित अवधारणा)

वांछित मात्रा प्राप्त करने के लिए दो या दो से अधिक सामग्रियों के किसी भी संयोजन को मिलाकर मिश्रण प्राप्त किया जा सकता है।

Type - 1

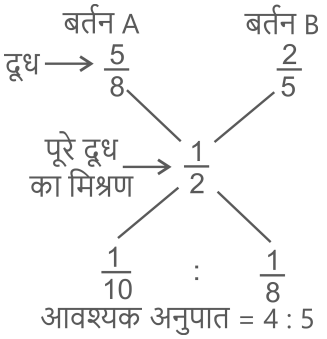
दो अलग-अलग मिश्रणों को मिलाकर एक मिश्रण प्राप्त करना

उदाहरण :- A और B दो बर्तनों में दूध और पानी क्रमशः 5 : 3 और 2 : 3 के अनुपात में हैं। बर्तन C में आधा दूध और आधा पानी वाला एक नया मिश्रण प्राप्त करने के लिए दोनों बर्तनों के द्रवों को किस अनुपात में मिलाया जाना चाहिए ?

SSC CHSL 04/08/2023 (1st Shift)

(a) 3 : 4 (b) 4 : 5 (c) 2 : 3 (d) 3 : 5

हल :-



Type - 2

दो अलग-अलग मिश्रणों के कुछ भागों को मिलाकर एक मिश्रण प्राप्त करना

उदाहरण :- दो मिश्र धातुओं में, एल्युमिनियम और ज़िंक का अनुपात 5 : 6 और 3 : 5 है। यदि पहली मिश्रधातु के 242 kg और दूसरी मिश्रधातु के 144 kg को आपस में मिलाया जाए, तो नई मिश्रधातु में एल्युमिनियम और ज़िंक का अनुपात क्या है ?

SSC CHSL 07/08/2023 (4th Shift)

(a) 76 : 117 (b) 82 : 111 (c) 93 : 100 (d) 68 : 125

हल :- प्रथम मिश्रधातु में : - एल्युमिनियम = $242 \times \frac{5}{11} = 110$ kg

जिंक = 242 − 110 = 132 kg

दूसरी मिश्रधातु में : - एल्युमिनियम = $144 \times \frac{3}{8} = 54$ kg

जिंक = 144 − 54 = 90 kg

आवश्यक अनुपात = 110 + 54 : 132 + 90

= 82 : 111

Exam hall approach: $\frac{242}{144} = \frac{121}{72}$

	एल्युमिनियम	:	जिंक
A →	5	:	6 = 11) × 8 ×121→ 11
B →	3	:	5 = 8) × 11 × 72 → 9

C → 55 + 27 : 66 + 45

⇒ 82 : 111

Type - 3

एक मिश्रण प्राप्त करने के लिए तीन अलग-अलग मिश्रणों को मिलाना

उदाहरण:- समान धारिता (क्षमता) की तीन बोतलों में दूध और पानी के मिश्रण का अनुपात क्रमशः 4 : 1, 4 : 3 और 1 : 2 है। इन तीनों बोतलों को एक बड़ी बोतल में खाली किया जाता है। बड़ी बोतल में क्रमशः दूध और पानी का अनुपात क्या होगा?

SSC MTS 15/06/2023 (Morning)

(a) 179 : 136 (b) 152 : 165

(c) 198 : 175 (d) 133 : 145

हल:- प्रश्न के अनुसार,

बड़ी बोतल में दूध की कुल मात्रा = $\frac{4a}{5} + \frac{4a}{7} + \frac{a}{3}$

$= \frac{84a + 60a + 35a}{105} = \frac{179a}{105}$

बड़ी बोतल में पानी की कुल मात्रा = $\frac{a}{5} + \frac{3a}{7} + \frac{2a}{3}$

$= \frac{21a + 45a + 70a}{105} = \frac{136a}{105}$

आवश्यक अनुपात = $\frac{179a}{105} : \frac{136a}{105}$

= 179 : 136

Exam hall approach:

	दूध	:	पानी
बोतल 1	→ 4	:	1 = 5) × 7 × 3 → 21
बोतल 2	→ 4	:	3 = 7) × 5 × 3 → 15
बोतल 3	→ 1	:	2 = 3) × 5 × 7→ 35

बड़ी बोतल ⇒ 84 + 60 + 35 : 21 + 45 + 70

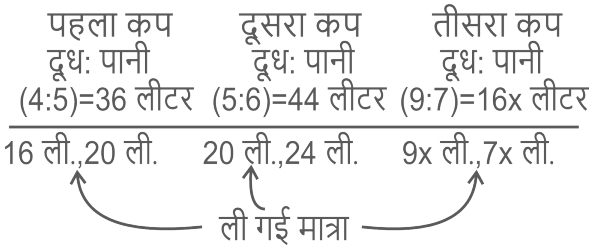
⇒ 179 : 136

@apna_pdf

Type - 4

तीन अलग-अलग मिश्रणों के कुछ भागों को मिलाकर एक मिश्रण प्राप्त करना

उदाहरण: तीन कपों में दूध और पानी का मिश्रण 4 : 5, 5 : 6, 9 : 7 के अनुपात में है। पहले कप से 36 लीटर और दूसरे कप से 44 लीटर मात्रा ली जाती है। तीसरे कप से कितनी मात्रा ली जाए कि तीनों कपों के अंतिम मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 1 : 1 हो ?
SSC MTS 10/05/2023 (Afternoon)
(a) 32 लीटर (b) 64 लीटर (c) 54 लीटर (d) 60 लीटर
हल:-



प्रश्न के अनुसार,

$\frac{16+20+9x}{20+24+7x} = \frac{1}{1} \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

तीसरे कप से ली गयी मात्रा = $(9x + 7x) = (16x)$ = 64 लीटर

Type - 5

सांद्रण :- सांद्रण पूरे मिश्रण में एक विशेष मात्रा का प्रतिशत है।

उदाहरण:- मिश्रण में पानी और दूध का अनुपात = 1 : 7

फिर, मिश्रण में दूध की सांद्रता = $\frac{7}{1+7} \times 100 = 87.5\%$

उदाहरण:- पानी की सांद्रता = $\frac{1}{1+7} \times 100 = 12.5\%$

या पानी की सांद्रता = (100 – दूध की सांद्रता) = (100 – 87.5) = 12.5%

उदाहरण:- यदि 20% दूध वाले 36 लीटर विलयन को 10% दूध वाले 48 लीटर विलयन में मिलाया जाता है, तो परिणामी विलयन में दूध की प्रतिशत मात्रा क्या होगी?
Higher Secondary 27/06/2023 (Shift - 3)
(a) 14.28% (b) 15.48% (c) 12.38% (d) 13.36%
हल:- प्रश्न के अनुसार,

अंतिम घोल में दूध की कुल मात्रा = $\frac{36 \times 20}{100} + \frac{48 \times 10}{100}$ = 12 लीटर

अंतिम घोल में पानी की कुल मात्रा = 84 – 12 = 72 लीटर

आवश्यक % = $\frac{12}{(72+12)} \times 100 = 14.28\%$

Type- 6

किसी मात्रा का जोड़ने या हटाने पर

उदाहरण:- एक 40 लीटर मिश्रण में 25% अल्कोहल और 75% पानी है। यदि
मिश्रण में 10 लीटर पानी मिलाया जाता है, तो नए मिश्रण में अल्कोहल का प्रतिशत क्या होगा ?
SSC CGL 25/07/2023 (4th shift)
(a) 27% (b) 18% (c) 20% (d) 25%
हल:- अल्कोहल = 10 लीटर और पानी = 30 लीटर

अब , अल्कोहल = 10 लीटर और पानी = 30 + 10 = 40 लीटर

आवश्यक % = $\frac{10}{10+40} \times 100 = 20\%$

उदाहरण:- एक मिश्रण में द्रव A और B क्रमशः 5 : 3 के अनुपात में हैं। यदि द्रव B की 3 लीटर मात्रा इनमें मिला दी जाए, तो द्रव A और द्रव B का अनुपात 7 : 6 हो जाता है। मिश्रण में द्रव A की मात्रा कितनी है ?
SSC CHSL 17/08/2023 (3rd Shift)
(a) $7\frac{2}{3}$ लीटर (b) $9\frac{1}{3}$ लीटर
(c) $11\frac{2}{3}$ लीटर (d) $13\frac{1}{3}$ लीटर
हल :- प्रश्न के अनुसार,

$\frac{5x}{3x+3} = \frac{7}{6} \Rightarrow 30x = 21x + 21$

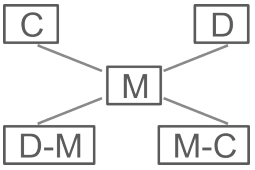
$x = \frac{21}{9}$ लीटर

आवश्यक मात्रा = $5 \times \frac{21}{9} = 11\frac{2}{3}$ लीटर

Type - 7

पृथकीकरण (Alligation)

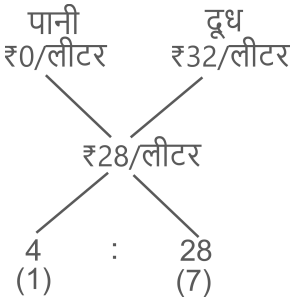
इसका उपयोग उस अनुपात को निकालने के लिए किया जाता है जिसमें दो या दो से अधिक पदार्थों को उनके संबंधित कीमतों पर मिश्रित किया जाना चाहिए ताकि एक निश्चित कीमत पर मिश्रण तैयार किया जा सके।



जहाँ,
C = पहले प्रकार का क्रय मूल्य
D = दूसरे प्रकार का क्रय मूल्य
M = औसत मूल्य
(D - M) = प्रथम प्रकार की मात्रा
(M - C) = दूसरे प्रकार की मात्रा

पृथकीकरण औसत की विधि है। इसमें औसत की भारित औसत अवधारणा का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण:- ₹32 प्रति लीटर की कीमत वाले दूध में किस अनुपात में पानी मिलाया जाए, ताकि ₹28 प्रति लीटर वाला मिश्रण प्राप्त हो सके ?
SSC CGL 14/07/2023 (2nd shift)
(a) 8 : 1 (b) 1 : 7 (c) 1 : 8 (d) 7 : 1
हल :-



आवश्यक अनुपात = 4 : 28 = 1 : 7

@apna_pdf

Type - 8

मिश्रण की वृद्धि/कमी

दूध और पानी के 'a' इकाई मिश्रण में x% दूध होता है। दूध का प्रतिशत x% से y% तक बढ़ाने के लिए मिलाई जाने वाली दूध की मात्रा निम्न दी गई है

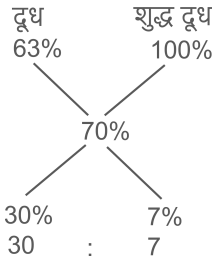
दूध की आवश्यक मात्रा = $\frac{a(x-y)}{100-y}$ इकाई

उदाहरण :- यदि 49 लीटर दूध के घोल में 63% दूध है, तो घोल में दूध की सांद्रता 70% करने के लिए कितना दूध और मिलाना चाहिए?
SSC CHSL 25/05/2022 Afternoon
(a) $11\frac{13}{30}$ (b) $14\frac{7}{30}$ (c) $21\frac{11}{30}$ (d) $13\frac{1}{30}$
हल :-

दूध की आवश्यक मात्रा = $\frac{a(x-y)}{100-y} = \frac{49(70-63)}{100-70}$

$= \frac{49\times 7}{30} = \frac{343}{30} = 11\frac{13}{30}$ लीटर

Exam hall approach:



प्रश्न के अनुसार,
⇒ 30 इकाई = 49 लीटर
तब, 7 इकाई = $\frac{49}{30}\times 7 = \frac{343}{30} = 11\frac{13}{30}$ लीटर

Type - 9

प्रतिस्थापन (replacement)

यदि केवल एक प्रक्रिया को n बार दोहराया जाता है, तो

शुद्ध द्रव की शेष मात्रा = $x\left(\frac{x-y}{x}\right)^n$

जहाँ,
x = मूल द्रव की मात्रा,
y = निकाली गई और प्रतिस्थापित की गई मात्रा
n = प्रक्रिया को दोहराए जाने की संख्या

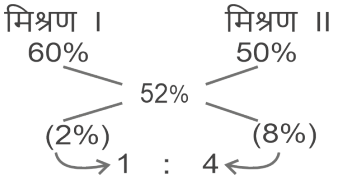
उदाहरण:- दूध और पानी के 10 लीटर मिश्रण में 8 लीटर दूध है। इस मिश्रण में से 2 लीटर निकालकर उसके स्थान पर शुद्ध दूध डाल दिया जाता है। इसी प्रक्रिया को दो बार और दोहराया जाता है। इस प्रकार प्राप्त मिश्रण में दूध (लीटर में) की मात्रा कितनी है ?
SSC CHSL 14/08/2023 (3rd Shift)
(a) 8.976 (b) 8.597 (c) 8.796 (d) 8.679
हल:- पानी की बची हुई मात्रा = पानी की प्रारंभिक मात्रा × $\left(1-\frac{\text{निकाला गया दूध}}{\text{कुल मिश्रण}}\right)^n$

$= 2\times\left(1-\frac{2}{2+8}\right)^3 = 2\times\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1.024$ लीटर

दूध की बची हुई मात्रा = 10 − 1.024 = 8.976 लीटर

समान मात्रा का प्रतिस्थापन

उदाहरण:- पानी और दूध के मिश्रण की एक कैन में 60% दूध है। इस मिश्रण के एक भाग को 50% दूध वाले दूसरे मिश्रण से बदल दिया जाता है और दूध का प्रतिशत 52% हो जाता है। प्रतिस्थापित मिश्रण की मात्रा क्या होगी ?
SSC CGL 13/12/2022 (2nd Shift)
(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{2}{5}$
हल :- मिश्रण विधि का प्रयोग :



मिश्रण की मात्रा बदली गई = $\frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$

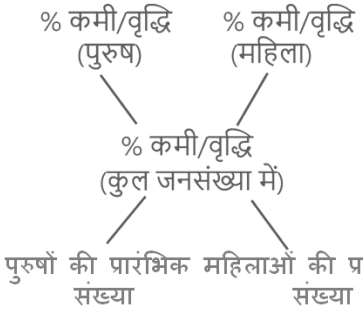
असमान मात्राओं का प्रतिस्थापन

उदाहरण:- 64 लीटर मिश्रण में ऐल्कोहॉल (alcohol) और पानी का अनुपात क्रमशः 1 : 3 है। इसमें से 32 लीटर मिश्रण को निकालकर उसके स्थान पर 16 लीटर पानी डाल दिया जाता है। ऐल्कोहॉल और पानी का नया अनुपात क्रमशः क्या है?
SSC MTS 19/05/2023 (Evening)
(a) 1 : 5 (b) 5 : 12 (c) 2 : 7 (d) 3 : 10
हल :- (1 + 3) इकाई = 64 लीटर
1 इकाई = 16 लीटर
अल्कोहल और पानी की प्रारंभिक मात्रा
= 16 लीटर और 48 लीटर
32 लीटर मिश्रण निकालने के बाद
(1 + 3) इकाई = 32 लीटर ⇒ 1 इकाई = 8 लीटर
अल्कोहल और पानी की मात्रा
= 8 ली. और 24 ली.
16 लीटर पानी डालने के बाद
अल्कोहल और पानी का नया अनुपात
= 8 : (24 + 16) = 1 : 5

अन्य अध्याय में मिश्रण एवं मिश्रण का प्रयोग

Type - 1

जब जनसंख्या में कुल वृद्धि या कमी की जाती है, तो परिणाम पुरुषों और महिलाओं की संख्या के अनुपात में आता है।

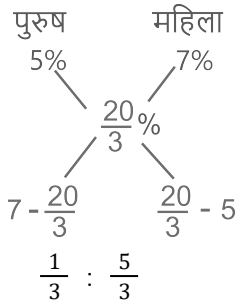


उदाहरण:- एक निश्चित वर्ष में, एक शहर की जनसंख्या 18000 थी। यदि अगले वर्ष, पुरुषों की जनसंख्या 5% और महिलाओं की जनसंख्या 7% बढ़ गई, और कुल जनसंख्या 19200 हो गई, तो उस वर्ष में पुरुषों और महिलाओं की जनसंख्या का अनुपात क्या है?
SSC CGL 20/07/2023 (1st shift)
(a) 2 : 5 (b) 1 : 5 (c) 4 : 3 (d) 3 : 5
हल:-

@apna_pdf

जनसंख्या में कुल प्रातिशत वृद्धि = $\frac{19200-18000}{18000} \times 100$

$= \frac{1200}{18000} \times 100 = \frac{20}{3}\%$



$\frac{1}{3} : \frac{5}{3}$

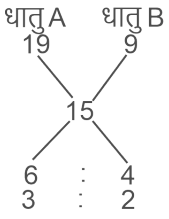
1 : 5

उदाहरण:- एक प्रयोग में, यह देखा गया कि धातु A, पानी से 19 गुना भारी है और धातु B, पानी से 9 गुना भारी है। धातु A और B को किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि इस प्रकार प्राप्त मिश्रण पानी से 15 गुना भारी हो ?

SSC CHSL 11/08/2023 (3rd Shift)

(a) 2 : 3 (b) 1 : 3 (c) 3 : 1 (d) 3 : 2

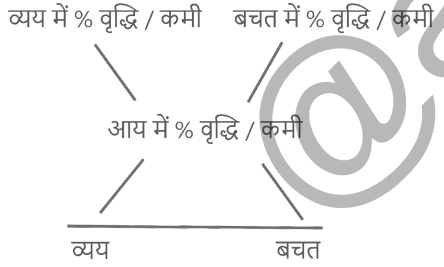
हल:-



आवश्यक अनुपात = 3 : 2

Type - 2

जब आय में वृद्धि या कमी की जाती है, तो परिणाम व्यय और बचत का अनुपात होता है।



उदाहरण :- विकास अपनी आय का 90% खर्च करता है। जब उसकी आय 25% बढ़ गई, तो उसका व्यय 20% बढ़ गया। उसकी बचत में वृद्धि का प्रतिशत है:

Higher Secondary 05/08/2022 (Shift - 2)

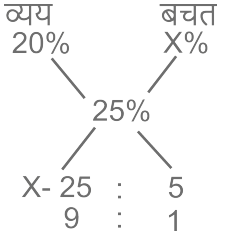
(a) 58% (b) 70% (c) 45% (d) 62%

हल :-

$\Rightarrow 90\% = \frac{9(\text{खर्च})}{10(\text{आय})}$

अनुपात → व्यय : बचत

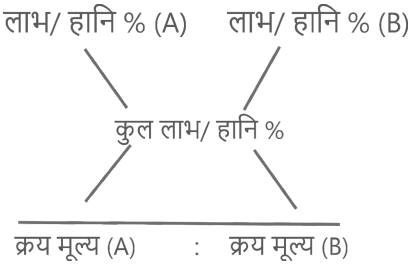
→ 9 : 1



$\Rightarrow \frac{x-25}{5} = \frac{9}{1} \Rightarrow x = 70\%$

Type - 3

लाभ और हानि में जब कुल लाभ/हानि% की जाती है। फिर परिणाम पहली वस्तु और दूसरी वस्तु के लागत मूल्य के अनुपात में आता है।

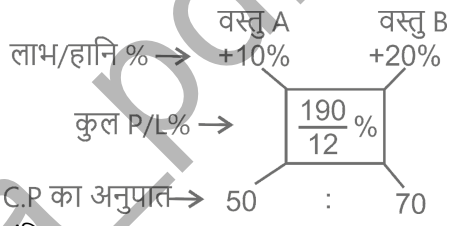


उदाहरण:- A और B की लागत कीमतों का योग 1200 रुपये है। A और B की बिक्री कीमतों का योग 1390 रुपये है। यदि A और B पर क्रमशः 10% और 20% का लाभ प्राप्त होता है, तो A और B की लागत मूल्यों के बीच अनुपात ज्ञात कीजिये।

SSC MTS 19/08/2019 (Afternoon)

(a) 5 : 7 (b) 5 : 9 (c) 7 : 13 (d) 6 : 11

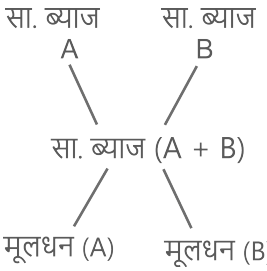
हल:- कुल लाभ % = $\frac{1390-1200}{1200} \times 100 = \frac{190}{12}\%$



वांछित अनुपात → 5 : 7

Type - 4

जब कुल ब्याज दिया जाता है, तो परिणाम दोनों वस्तुओं के मूल मूलधन के रूप में आता है।



उदाहरण:- राजेश ने ₹10,000 को दो अलग-अलग निवेश योजनाओं, A और B में विभाजित करके क्रमशः 8% और 10% की साधारण ब्याज दरों पर निवेश किया। यदि 2 वर्षों में अर्जित कुल ब्याज ₹1,680 है, तो योजना A में निवेश की गई राशि है:

SSC CPO 03/10/2023 (1st Shift)

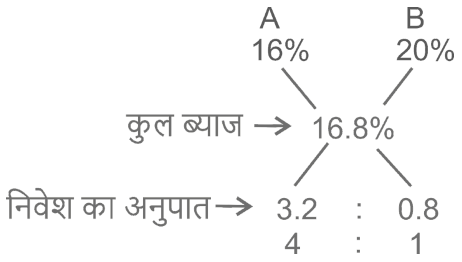
(a) ₹4,000 (b) ₹2,000 (c) ₹6,000 (d) ₹8,000

हल:- A के 2 वर्षों के लिए S.I = 16%

B के 2 वर्षों के लिए S.I = 20%

कुल दर% = $\frac{1680}{10000} \times 100 = 16.8\%$

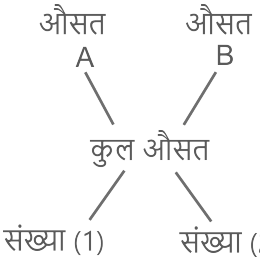
@apna_pdf



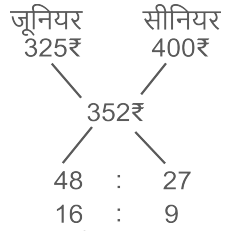
अतः, A द्वारा निवेश की गई राशि = $\frac{4}{5} \times 10000 = ₹8,000$

Type - 5

जब संख्या का समग्र औसत दिया जाता है, तो परिणाम पहली और दूसरी संख्या के अनुपात के रूप में आता है।



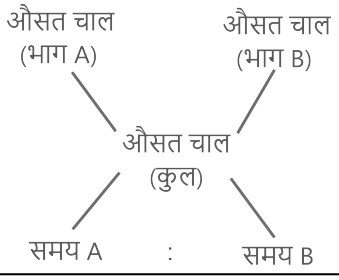
उदाहरण :- स्कूल भ्रमण के दौरान जूनियर स्कूल के प्रत्येक छात्र से ₹325 और सीनियर स्कूल के प्रत्येक छात्र से ₹400 शुल्क लिया गया। यदि जूनियर स्कूल में 80 छात्र थे और प्रति छात्र से ली जाने वाली संयुक्त औसत राशि ₹352 थी, तो सीनियर स्कूल से कितने छात्र भ्रमण के लिए गए थे?
SSC CGL 24/07/2023 (1st shift)
(a) 55 (b) 45 (c) 50 (d) 40
हल :-



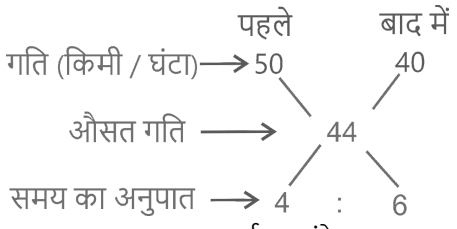
16 इकाई = 80 जूनियर छात्र
9 इकाई = $\frac{80}{16} \times 9$ = 45 सीनियर छात्र

Type - 6

जब कुल औसत गति दी जाती है, तो परिणाम समय के समानुपाती होता है।



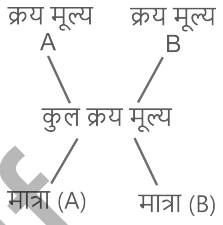
उदाहरण:- एक आदमी अपनी कार को 2 घंटे तक 50 किमी/घंटा की गति से चलाता है और फिर यात्रा के अंत तक 40 किमी/घंटा तक धीमी गति से चलने का फैसला करता है। यदि यात्रा के लिए उसकी औसत गति 44 किमी/घंटा थी, तो वह कितने समय तक अपनी कार 40 किमी/घंटा की गति से चलाता है?
SSC MTS 16/05/2023 (Afternoon)
(a) 2 hours (b) 1 hour
(c) 3 hours (d) 4 hours
हल:-



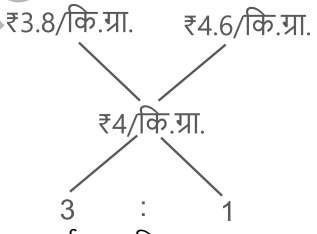
अनुपात = 2 : 3 ⇒ 2 इकाई = 2 घंटे
तो, 3 इकाई = 3 घंटे

Type - 7

जब, दो वस्तुओं और मिश्रण का लागत मूल्य दिया जाता है, तो परिणामी पहली संख्या और दूसरी संख्या का अनुपात होता है।



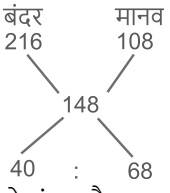
उदाहरण:- ₹3.80 प्रति किलोग्राम की दर से कितने किलोग्राम चीनी को ₹4.60 प्रति किलोग्राम की दर से 60 किलोग्राम चीनी के साथ मिलाया जाना चाहिए, ताकि मिश्रण को ₹5.20 प्रति किलोग्राम की दर से बेचने पर 30% का लाभ हो सके?
SSC MTS 01/09/2023 (3rd Shift)
(a) 170 kg (b) 120 kg (c) 160 kg (d) 180 kg
हल:- मिश्रण का लागत मूल्य = $5.2 \times \frac{10}{13}$ = ₹4/किलो



1 इकाई = 60 किग्रा
आवश्यक मात्रा (3 इकाई) = 180 किग्रा

विविध

उदाहरण :- किसी पार्क में एक निश्चित समय पर बंदरों और मानव आगंतुकों के सिरों की संख्या और पैरों की संख्या की गिनती की गई और यह पाया गया कि 54 सिर और 148 पैर थे। पार्क में बंदरों की संख्या ज्ञात कीजिए।
SSC CGL Tier II (26/10/2023)
(a) 20 (b) 16 (c) 18 (d) 14
हल :-



तो, बंदर और मानव की संख्या का अनुपात
= 40 : 68 = 10 : 17
10 + 17 = 27 इकाई = 54
10 इकाई = $\frac{54}{27} \times 10 = 20$

@apna_pdf

औसत

दिए गए आंकड़ों का औसत या अंकगणित माध्य, आंकड़ों के योग को आंकड़ों की संख्या द्वारा विभाजित करके प्राप्त किया जाता है।

इसलिए, औसत = $\frac{\text{दिए गए आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$

उदाहरण:- 10, 15, 25 और 30 का औसत = ?

हल:- औसत = $\frac{10+15+25+30}{4} = \frac{80}{4} = 20$

उदाहरण:- $3^{20}, 3^{30}, 3^{40}$. का औसत ज्ञात कीजिए ?

Graduate Level 03/08/2022 (Shift - 3)

(a) $(3^{20}+3^{10}+3^{40})$ (b) 3^{30}

(c) $(3^{20}+3^{30}+3^{40})$ (d) $(3^{19}+3^{29}+3^{39})$

हल:- $3^{20}, 3^{30}$ और 3^{40} का औसत

$= \frac{3^{20}+3^{30}+3^{40}}{3} = \frac{3(3^{19}+3^{29}+3^{39})}{3}$

$= (3^{19} + 3^{29} + 3^{39})$

कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

1) प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का औसत = $(\frac{n+1}{2})$

2) प्रथम n सम संख्याओं का औसत = $(n + 1)$

3) प्रथम n विषम संख्याओं का औसत = n

4) लगातार संख्याओं का औसत = $\frac{\text{पहली संख्या} + \text{अंतिम संख्या}}{2}$

5) 1 से n विषम संख्याओं का औसत = $\frac{\text{अंतिम विषम संख्या} + 1}{2}$

6) 1 से n सम संख्याओं का औसत = $\frac{\text{अंतिम सम संख्या} + 2}{2}$

7) प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत = $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

8) प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घन का औसत = $\frac{n(n+1)^2}{4}$

9) किसी भी संख्या के n गुणांक का औसत = $\frac{\text{संख्या} \times (n+1)}{2}$

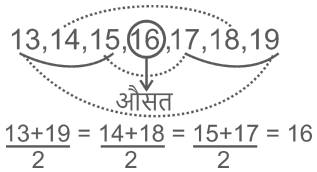
10) संयुक्त माध्य या संयुक्त औसत :

यदि n_1 और n_2 प्रेक्षणों का माध्य क्रमशः $\overline{x_1}$ और $\overline{x_2}$ है तो

संयुक्त माध्य = $\frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2}$

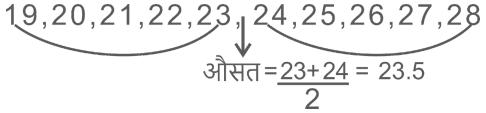
11) यदि प्रेक्षण A.P. में हैं तो औसत मध्य पद है।

(a) यदि पदों की संख्या विषम है



$\frac{13+19}{2} = \frac{14+18}{2} = \frac{15+17}{2} = 16$

(b) यदि पदों की संख्या सम है



महत्वपूर्ण नोट :

1) यदि सभी संख्याएँ 'a' से बढ़ती हैं तो संख्याओं का औसत भी 'a' से बढ़ जाएगा।

उदाहरण :- 21 संख्याओं का औसत 60 है। यदि प्रत्येक संख्या में 20 की वृद्धि की जाती है, तो वह संख्या ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा औसत में वृद्धि होती है।

SSC MTS 16/05/2023 (Afternoon)

(a) 12 (b) 18 (c) 15 (d) 20

हल :- 21 संख्याओं का औसत = 60

यदि प्रत्येक संख्या में 20 की वृद्धि की जाती है तो औसत में भी 20 की वृद्धि होगी

2) यदि सभी संख्याएँ 'a' से घट जाती हैं तो संख्याओं का औसत भी 'a' से घट जाएगा।

उदाहरण :- 24 संख्याओं का औसत 43 है। यदि हम प्रत्येक संख्या में से एक संख्या 'M' घटाते हैं, तो औसत 38 हो जाता है। M का मान क्या था?

SSC MTS 04/05/2023 (Morning)

(a) 12 (b) 5 (c) 7 (d) 10

हल :- 24 संख्या का औसत = 43

प्रत्येक संख्या में से 'M' घटाने पर,

तो नया औसत = 43 − M = 38

अतः, 'M' का मान = 43 − 38 = 5

3) यदि सभी संख्याओं को 'a' से गुणा किया जाता है तो उनका औसत भी 'a' से गुणा किया जाना चाहिए।

उदाहरण :- 70 मानों का औसत 40 है। यदि प्रत्येक मान को 20 से गुणा किया जाए, तो परिवर्तित औसत क्या होगा ?

RRC Group D 26/08/2022 (Morning)

(a) 800 (b) 60 (c) 90 (d) 1400

हल :- समूह की प्रत्येक संख्या में परिवर्तन से समूह के औसत में समान परिवर्तन होता है।

तब, नया औसत = 40 × 20 = 800

विचलन विधि

यदि हमें परंपरागत रूप से औसत निकालना है तो

औसत = $\frac{\text{दिए गए आंकड़ों का योग}}{\text{आंकड़ों की संख्या}}$

लेकिन यह विधि कभी-कभी लंबी हो सकती है इसलिए इससे बचने के लिए हम विचलन विधि का उपयोग करते हैं।

चरण 1 - संख्याओं की श्रेणी में किसी भी संख्या को औसत मानें।

चरण 2 -प्रत्येक संख्या से औसत का अंतर अर्थात विचलन ज्ञात करें।

चरण 3 - विचलन जोड़ें और इसे प्रेक्षणों की कुल संख्या से विभाजित करें।

चरण 4 - सटीक औसत प्राप्त करने के लिए हमने जो औसत माना था उसमें से विचलन को जोड़ें या घटाएं (विचलन के संकेत के अनुसार)।

उदाहरण :- 45,50,46,55,40,41,52 का औसत ज्ञात कीजिये ?

हल :- माना औसत = **46**

	45,	50,	46,	55,	40,	41,	52
विचलन :	-1,	+4,	0,	+9,	-6,	-5,	+6

औसत में शुद्ध विचलन = $\frac{-1+4+0+9-6-5+6}{7} = \frac{+7}{7} = +1$

वास्तविक औसत = 46 + 1 = 47

उदाहरण :- 45,50,46,55,40,41,52 का औसत ज्ञात कीजिये ?

हल :- माना औसत = **50**

@apna_pdf

	45,	50,	46,	55,	40,	41,	52
विचलन :	-5,	+0,	-4,	+5,	-10,	-9,	+2

औसत में शुद्ध विचलन $= \frac{-5+0-4+5-10-9+2}{7}$

$= \frac{-21}{7} = -3$

वास्तविक औसत = 50 - 3 = 47

रन रेट और गेंदबाजी का औसत

मूल रूप से रन रेट शब्द का अर्थ है कि क्रिकेट मैच के एक ओवर में कितने रन बने हैं। अधिक रन रेट बल्लेबाजों के लिए अच्छा है ।

रन रेट = $\frac{\text{बनाए गए कुल रन}}{\text{खेले गए ओवरों की संख्या}}$

उदाहरण :- यदि बल्लेबाज ने 9 ओवर में 225 रन बनाए हैं, तो उसका रन रेट ज्ञात कीजिए।

हल :- रन रेट = $\frac{225}{9}$ = 25 रन/ओवर

गेंदबाजी का औसत = $\frac{\text{कुल रन}}{\text{कुल विकेटों की संख्या}}$

कम गेंदबाजी का औसत, गेंदबाजों के लिए अच्छा है।

उदाहरण :- यदि गेंदबाज ने 120 रन देकर 3 विकेट लिए हैं, तो उसका गेंदबाजी का औसत ज्ञात कीजिए।

हल :- गेंदबाजी का औसत = $\frac{120}{3}$ = 40 रन/विकेट

उदाहरण :- एक क्रिकेटर का 10 मैचों का औसत स्कोर 40 रन है। यदि पहले छह मैचों का औसत 44 है, तो अंतिम चार मैचों के रनों का औसत ज्ञात कीजिए ।

Group D 18/09/2022 (Evening)

(a) 20 (b) 38 (c) 42 (d) 34

हल :- 10 मैचों में एक क्रिकेटर का औसत स्कोर = 40 रन

तो 10 मैचों के स्कोर का योग = 400 रन

पहले 6 मैचों का औसत = 44

6 मैचों के स्कोर का योग = 44 × 6 = 264

पिछले चार मैचों का औसत = $\frac{400-264}{4} = \frac{136}{4} = 34$

Exam Hall approach :-

विचलन = $\frac{(44-40)\times 6}{\text{अंतिम चार मैच}} = \frac{24}{4} = 6$

अंतिम चार मैचों का औसत = 40 - 6 = 34

(**नोट:-** जब औसत सकारात्मक होता है तो शुद्ध औसत घट जाता है और जब औसत नकारात्मक होता है तो शुद्ध औसत बढ़ जाता है।)

उदाहरण :- एक बल्लेबाज अपनी 12वीं पारी में 84 रन बनाता है, जिससे उसके प्रति पारी औसत स्कोर में 4 रन की वृद्धि हो जाती है। 12वीं पारी के बाद बल्लेबाज का प्रति पारी औसत स्कोर कितना है?

NTPC CBT II (15/06/2022) 1st Shift

(a) 44 (b) 40 (c) 42 (d) 36

हल :- माना 11$^{वीं}$ पारी तक बल्लेबाज का औसत स्कोर A है।

11 पारियों में कुल रनों का योग = 11A

प्रश्न के अनुसार, $\frac{11A+84}{12}$ = A + 4 ⇒ A = 36

तो, 12वीं पारी के बाद औसत स्कोर = 36 + 4 = 40

नए अवलोकन का जोड़

यदि औसत x है और x से अधिक मान वाली संख्या जोड़ दी जाती है तो नया औसत x से अधिक होगा। इसी प्रकार, यदि x से कम मान वाली संख्या को जोड़ा जाए तो नया औसत x से कम होगा।

उदाहरण :- प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का औसत 3 है। 6 जोड़ने के बाद एक नया औसत ज्ञात कीजिए।

हल :- पहली पाँच प्राकृत संख्याएँ हैं: 1, 2, 3, 4, 5

प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का योग = $\frac{6\times 5}{2}$ = 15

चूंकि संख्या 6 पुराने औसत से अधिक है, इसलिए नया औसत पुराने औसत से अधिक होने वाला है।

अत: नया औसत = $\frac{15+6}{5+1} = \frac{21}{6}$ = 3.5 जो 3 से बड़ा है।

उदाहरण :- 10 पार्सलों का औसत भार 28.6 kg है। एक नया पार्सल शामिल करने से औसत भार में 0.6 kg की कमी हो जाती है। नए पार्सल का भार (kg में) कितना है?

Selection Post 28/06/2023 (3rd Shift)

(a) 23 (b) 21 (c) 22 (d) 20

हल :- नए पार्सल का वजन = $28.6 - (11 \times 0.6)$ = 22 किग्रा.

मौजूदा अवलोकन को हटाना

यदि औसत x है और x से कम मान वाली संख्या को हटा दिया जाता है तो नया औसत, x से अधिक होगा। इसी प्रकार, यदि x से अधिक मान वाली संख्या को हटा दिया जाए तो नया औसत, x से कम होगा।

उदाहरण :- प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का औसत 3 है। 2 हटाने के बाद नया औसत ज्ञात कीजिए।

हल :- प्रथम पाँच प्राकृतिक संख्याएँ हैं: 1, 2, 3, 4, 5.

प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का योग = 3 × 5 = 15

चूँकि संख्या 2 पुराने औसत से कम है, नया औसत पुराने औसत से अधिक होने वाला है।

तो, नया औसत = $\frac{15-2}{5-1} = \frac{13}{4}$ = 3.25 जो कि 3 से अधिक है।

उदाहरण :- 36 लड़कों और उनके प्रोफेसर की औसत आयु 18 वर्ष है। यदि हम प्रोफेसर को छोड़ दें तो औसत 17 वर्ष हो जाता है। प्रोफेसर की आयु (वर्षों में) क्या है?

RRB NTPC CBT - I 01/02/2021 (Morning)

(a) 34 (b) 44 (c) 64 (d) 54

हल :- 36 लड़कों और प्रोफेसर की औसत आयु = 18 वर्ष

36 लड़कों और प्रोफेसर की आयु का योग

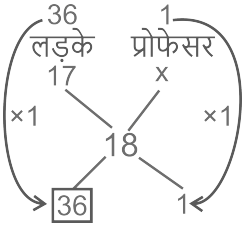
= 18 × 37 = 666 वर्ष

केवल लड़कों की औसत आयु = 17 वर्ष

लड़कों की आयु का योग = 17 × 36 = 612 वर्ष

प्रोफेसर की आयु = 666 - 612 = 54 वर्ष

Exam hall approach:



@apna_pdf

प्रोफेसर की आयु (x) = $\frac{18+36}{1}$ = 54 वर्ष

उदाहरण :- एक शिविर में कुछ बच्चे हैं और उनका औसत वजन 40 किग्रा है। यदि 36 किग्रा औसत वजन वाले 5 बच्चे शिविर में शामिल होते हैं या यदि 43.2 किग्रा औसत वजन वाले 5 बच्चे शिविर छोड़ देते हैं, तो दोनों ही मामलों में बच्चों का औसत वजन बराबर होता है। शिविर में प्रारंभ में कितने बच्चे हैं?
SSC CGL 23/08/2021 (Evening)
(a) 35 (b) 45 (c) 40 (d) 50

हल :- माना बच्चों की संख्या = x

$\frac{40x+5\times36}{x+5} = \frac{40x-5\times43.2}{x-5}$,

$\Rightarrow (x-5)(40x+180)$

$= (x+5)(40x-216)$

$\Rightarrow 40x^2 + 180x - 200x - 900$

$= 40x^2 - 216x + 200x - 1080$

$\Rightarrow 4x = 180 \Rightarrow x = 45$

Exam hall approach :-

संख्या	औसत	
n	40	
+5	36	(4 × 5) = -20
-5	43.2	(3.2 × 5) = -16

प्रश्न के अनुसार, ,

$\Rightarrow 40 - \frac{20}{n+5} = 40 - \frac{16}{n-5}$

$\Rightarrow -\frac{20}{n+5} = -\frac{16}{n-5} \Rightarrow$ n = 45

अवलोकन का ओवरलैपिंग

एक अवलोकन का ओवरलैपिंग :-

उदाहरण :- 25 प्रेक्षणों का माध्य 36 है। यदि इसके पहले 13 प्रेक्षणों का माध्य 32 और अंतिम 13 प्रेक्षणों का माध्य 40 है, तो इसका 13वाँ प्रेक्षण क्या होगा?
RRB NTPC CBT - I 19/01/2021 (Evening)
(a) 38 (b) 36 (c) 23 (d) 40

हल :- 25 प्रेक्षणों का योग = 36 × 25=900
पहले 13 प्रेक्षणों का योग = 32 × 13 = 416
अंतिम 13 प्रेक्षणों का योग = 40 × 13 = 520
प्रथम 13 प्रेक्षणों का योग + अंतिम 13 प्रेक्षणों का योग - 13वां प्रेक्षण = 25 प्रेक्षणों का कुल योग
416 + 520 − 13 वां प्रेक्षण = 900
13वां प्रेक्षण = 36

Exam hall Approach:
25 अवलोकन का औसत = 36
प्रथम 13 अवलोकन का औसत = 32
पिछले 13 अवलोकनों का औसत = 40
विचलन = -4 × 13 और + 4 × 13 = -52 और + 52 = 0
13वाँ अवलोकन = 36 + 0 = 36

दो अवलोकनों का ओवरलैपिंग :-

उदाहरण :- 10 संख्याओं का औसत 26.5 है। यदि पहली 6 संख्याओं का औसत 25 है और अंतिम 6 संख्याओं का औसत 29 है, तो 5वीं और 6वीं संख्या का औसत क्या है?
AFCAT 15/02/2022 (1st Shift)
(a) 29.2 (b) 29 (c) 29.5 (d) 28

हल :- प्रश्न के अनुसार,
पहली 10 संख्याओं का योग = 10 × 26.5 = 265
पहली 6 संख्याओं का योग = 6 × 25 = 150
अंतिम 6 संख्याओं का योग = 6 × 29 = 174
5वीं और 6वीं संख्याओं का योग = (150 + 174) - 265 = 59

आवश्यक औसत = $\frac{59}{2}$ = 29.5

Exam hall Approach:-
औसत = 26.5

पहली 6 संख्याएँ	अंतिम 6 संख्याएँ
↓ औसत	↓ औसत
25	29
विचलन : -1.5 × 6	+2.5 × 6

शुद्ध विचलन = -9 + 15 = +6

5वीं और 6वीं संख्या का औसत = 26.5 + $\frac{6}{2}$ = 29.5

डेटा ग़लत पढ़ा गया

उदाहरण :- 10 प्रेक्षणों का औसत 46 है। बाद में यह ज्ञात हुआ कि एक प्रेक्षण को 142 के स्थान पर गलती से 42 पढ़ा गया था। सही औसत ज्ञात करें।
SSC GD Constable 16/11/2021 (Morning)
(a) 52 (b) 46 (c) 58 (d) 56

हल :-

सही औसत = 46 + $\frac{142-42}{10}$ = 46 + $\frac{100}{10}$ = 46 + 10 = 56

उदाहरण :- रेनू के अंक गलत तरीके से 9 की जगह 99 दर्ज किए गए थे। इस त्रुटि के कारण, कक्षा के औसत अंक वास्तविक औसत से 2.25 अधिक थे। कक्षा में छात्रों की संख्या क्या है?
NTPC CBT II (09/05/2022) 2nd Shift
(a) 40 (b) 36 (c) 42 (d) 38

हल :- माना छात्रों की संख्या "n" है
गलत प्रविष्टि के कारण बढ़े अंक = 99 - 9 = 90

प्रश्न के अनुसार , $\frac{90}{2.25}$ = n $\Rightarrow$ n = 40

प्रतिस्थापन

उदाहरण :- किसी समूह में एक निश्चित छात्रों की संख्या की औसत ऊंचाई 155.6 सेमी है। यदि 150.5 सेमी की औसत ऊंचाई वाले 12 छात्र समूह में शामिल हो जाते हैं और 159 सेमी की औसत ऊंचाई वाले 7 छात्र समूह छोड़ देते हैं, तो समूह में छात्रों की औसत ऊंचाई 34 mm तक कम हो जाती है । प्रारंभ में, समूह में विद्यार्थियों की संख्या कितनी है?
SSC CHSL 05/08/2021 (Morning)
(a) 30 (b) 25 (c) 40 (d) 20

हल :- 34 mm = 3.4 cm
माना छात्रों की संख्या = n
प्रश्नानुसार,

$n \times 155.6 + 12 \times 150.5 - 7 \times 159$

$= (n+5) \times 152.2$

$\Rightarrow$ 3.4n + 693 = 761 $\Rightarrow$ n = 20

@apna_pdf

अवलोकन का स्थानांतरण

उदाहरण :- सेक्शन A और B के छात्रों का औसत वजन, जिनमें प्रत्येक में 40 छात्र हैं, क्रमशः 45.5 किग्रा और 44.2 किग्रा हैं। सेक्शन A के दो छात्रों का औसत वजन 48.75 किलोग्राम था, जिन्हें सेक्शन B में स्थानांतरित कर दिया गया और सेक्शन B के 2 छात्रों को सेक्शन A में स्थानांतरित कर दिया गया, जिससे दोनों सेक्शन का औसत भार समान हो गया। सेक्शन B से सेक्शन A में शिफ्ट किए गए छात्रों का औसत वजन (किलोग्राम में) कितना है?SSC CGL 23/08/2021 (Afternoon)
(a) 34.5 (b) 35 (c) 35.75 (d) 34.25

हल :- छात्रों के औसत वजन में अंतर = 45.5 - 44.2 = 1.3
वजन का कुल अंतर = 1.3 × 40 = 52
इसलिए 26 किग्रा को सेक्शन A से B में
स्थानान्तरण करने की जरूरत है
यदि दो छात्रों का स्थानान्तरण किया जाता है तो भार में अंतर = 13
अतः, B से A में स्थानांतरित हुए विद्यार्थियों का औसत भार= 48.75 - 13 = 35.75

उदाहरण :- तीन धनात्मक संख्याएँ हैं। यदि उनमें से किन्हीं दो का औसत तीसरी संख्या में जोड़ दिया जाए, तो परिणामी योगफल 154, 148 और 132 होगा। मूल तीन संख्याओं का योग है:
SSC MTS 07/10/2021 (Evening)
(a) 222 (b) 231 (c) 246 (d) 217

हल :- माना कि तीन संख्याएँ a, b और c हैं।
प्रश्न के अनुसार,
$\frac{a+b}{2}$ + c = 154
⇒ a + b + 2c = 308 .....(1)
$\frac{b+c}{2}$ + a = 148
⇒ b + c + 2a = 296 .....(2)
$\frac{a+c}{2}$ + b = 132
⇒ a + c + 2b = 264.....(3)
समीकरण (1), (2) और (3) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है
4(a + b + c) = 308 + 296 + 264
⇒ 4(a + b + c) = 868
इसलिए, a + b + c = 217

Exam hall approach :-
संख्याओं का योग = $\frac{154+148+132}{2}$ = $\frac{434}{2}$ = 217

आयु आधारित

उदाहरण :- एक परिवार के 6 सदस्यों की औसत आयु 25 वर्ष है। यदि सबसे छोटे सदस्य की आयु 4 वर्ष है, तो सबसे छोटे सदस्य के जन्म से ठीक पहले परिवार की औसत आयु कितनी थी ?
SSC CHSL 02/08/2023 (1st Shift)
(a) 27.2 वर्ष (b) 24.8 वर्ष (c) 32.8 वर्ष (d) 25.2 वर्ष

हल :- 6 सदस्यों की कुल आयु = 25 × 6 = 150 वर्ष
4 वर्ष पहले , कुल आयु = 150 – (6 × 4) = 126 वर्ष
आवश्यक औसत आयु = $\frac{126}{5 \text{ सदस्य}}$ = 25.2 वर्ष

विविध प्रश्न

उदाहरण :- एक शहर में एक सप्ताह का औसत तापमान 28° सेल्सियस है। यदि सोमवार, मंगलवार, बुधवार और गुरुवार का औसत तापमान 27.5° सेल्सियस है और गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार और रविवार का औसत तापमान 29° सेल्सियस है, तो गुरुवार के लिए दर्ज तापमान कितना है ?
RRB ALP Tier - I (29/08/2018) Evening
(a) 30° सेल्सियस (b) 29° सेल्सियस (c) 31° सेल्सियस (d) 28° सेल्सियस

हल :- एक शहर का औसत तापमान = 28°C
सोमवार से गुरुवार तक औसत तापमान में विचलन = – 0.5 × 4 = - 2°C
गुरुवार से रविवार के लिए औसत तापमान में विचलन = + 1 × 4 = 4°C
तापमान में शुद्ध विचलन = - 2 + 4 = 2°C
इसलिए, गुरुवार के लिए रिकॉर्ड किया गया तापमान = 28 + 2 = 30°C

उदाहरण :- नवंबर माह में एक कला प्रदर्शनी आयोजित की गई । सप्ताह के कार्यदिवसों (वीक डेज) और सप्ताहांत (वीक-एंड) पर आने वाले पर्यटकों की औसत संख्या क्रमश: 450 और 750 थी । यदि माह का पहला दिन सोमवार था, तो माह में पर्यटकों की औसत संख्या कितनी थी ?
SSC MTS 16/08/2019 (Evening)
(a) 520 (b) 530 (c) 510 (d) 540

हल :- महीना सोमवार से शुरू होता है इसलिए कुल सप्ताहांत =2 ×4 = 8
सप्ताहांत पर पर्यटकों की कुल संख्या = 750 ×8 = 6000
सप्ताह के दिनों में पर्यटकों की कुल संख्या = 450 × 22 = 9900
अभीष्ट औसत = $\frac{6000+9900}{30}$ = 530

उदाहरण :- एक छात्रावास में 45 छात्र हैं। यदि विद्यार्थियों की संख्या में 5 की वृद्धि हो जाती है, तो मेस का कुल व्यय ₹30 प्रतिदिन बढ़ जाता है जबकि प्रति व्यक्ति औसत दैनिक व्यय ₹2 कम हो जाता है। मेस का मूल कुल दैनिक व्यय ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 13/07/2022 (Evening)
(a) ₹1,170 (b) ₹1,710 (c) ₹1,200 (d) ₹1,250

हल :-
माना औसत खर्च x है
अब प्रश्न के अनुसार
45x + 30 = 50(x - 2)
45x + 30 = 50x - 100
5x = 130 ⇒ x = 26
मूल खर्च = 45x = 45 × 26 = 1,170 Rs

@apna_pdf

कार्य और समय

समय :- समय वह अवधि है जिसके दौरान कोई गतिविधि या कार्य होता है या जारी रहता है।
कार्य :- कार्य एक निश्चित परिणाम प्राप्त करने के लिए किया गया कार्य या गतिविधियों का समूह है।
कार्यक्षमता(Efficiency) :- कार्यक्षमता समय के व्युत्क्रमानुपाती होती है जब किए गए कार्य की मात्रा सतत (constant) होती है

$$\text{कार्यक्षमता} \propto \frac{1}{\text{लिया गया समय}}$$

कार्य कुशलता का अर्थ है, "एक व्यक्ति एक दिन में कितना कार्य कर सकता है (प्रतिशत में व्यक्त)"।

यदि A,B,C व्यक्ति कार्य को क्रमशः x दिन, y दिन, z दिन में कर सकते हैं तो उनकी दक्षता का अनुपात -

		A	:	B	:	C
समय	→	x	:	y	:	z
दक्षता	→	$\frac{1}{x}$	:	$\frac{1}{y}$	:	$\frac{1}{z}$

उदाहरण :- A, B और C को एक कार्य पूरा करने का काम सौंपा गया है। यदि A, B और C द्वारा लिए गए समय का अनुपात 4: 3: 6 है, तो उनकी दक्षता का अनुपात ज्ञात कीजिए।
SSC MTS 10/05/2023 (Evening)
(a) 3 : 4 : 2 (b) 4 : 3 : 6
(c) 3 : 4 : 6 (d) 4 : 6 : 8
हल :- प्रश्न के अनुसार,

		A	:	B	:	C
समय	→	4	:	3	:	6
दक्षता	→	$\frac{1}{4}$	:	$\frac{1}{3}$	:	$\frac{1}{6}$) × 12 (LCM of 4,3,6)

A : B : C की दक्षता का अनुपात = 3 : 4 : 2

मूल अवधारणा

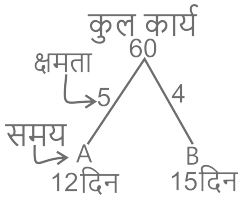
यदि A एक कार्य को X दिनों में पूरा करता है,	यदि B एक कार्य Y दिनों में पूरा करता है,
उसके द्वारा 1 दिन में पूरा किया गया कार्य = $\frac{1}{X}$	उसके द्वारा 1 दिन में पूरा किया गया कार्य = $\frac{1}{Y}$
A और B द्वारा मिलकर 1 दिन में किया गया कार्य ($\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$).	

Type - 1

• यदि A किसी कार्य को X दिनों में पूरा करता है, B उसी कार्य को Y दिनों में कर सकता है, तो-

A और B द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया कुल समय = $(\frac{XY}{X+Y})$ दिन .

उदाहरण :- A एक काम को 12 दिनों में कर सकता है और B उसी काम को 15 दिनों में कर सकता है। यदि दोनों मिलकर कार्य करें तो कार्य कितने दिन में पूरा होगा?
SSC CHSL 02/08/2023 (4th Shift)
(a) $7\frac{2}{3}$ (b) $6\frac{2}{3}$ (c) $5\frac{2}{3}$ (d) $8\frac{2}{3}$
हल :- आवश्यक समय = $\frac{A \times B}{A+B} = \frac{12 \times 15}{12+15}$
= $\frac{12 \times 15}{27} = 6\frac{2}{3}$ दिन
Exam Hall Approach:-



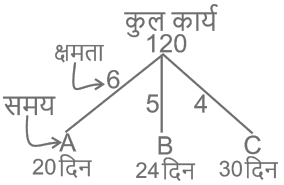
आवश्यक समय = $\frac{60}{9} = 6\frac{2}{3}$ दिन

Type - 2

• यदि A किसी कार्य को X दिनों में पूरा करता है, B उसी कार्य को Y दिनों में पूरा कर सकता है और C उस कार्य को Z दिनों में पूरा कर सकता है तो-

A, B और C द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया कुल समय
= $(\frac{XYZ}{XY+YZ+ZX})$ दिन

उदाहरण :- A B और C एक कार्य को क्रमशः 20, 24 और 30 दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि वे एक साथ काम करते हैं तो इसे समाप्त करने में उन्हें कितने दिन लगेंगे:
RRC Group D 09/09/2022 (Evening)
(a) 8 दिन (b) 5 दिन (c) 6 दिन (d) 7 दिन
हल :- A, B और C द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया कुल समय
= $(\frac{20 \times 24 \times 30}{20 \times 24 + 24 \times 30 + 30 \times 20})$ दिन
= $(\frac{20 \times 24 \times 30}{480+720+600})$ दिन = $(\frac{20 \times 24 \times 30}{1800}) = 8$ दिन
Exam Hall Approach:-



आवश्यक दिन = $\frac{120}{6+5+4} = 8$ दिन

Type - 3

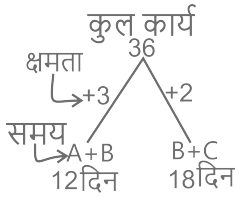
दक्षता संबंधी प्रश्न

$$\text{दक्षता} \propto \frac{1}{\text{लिया गया समय}}$$

उदाहरण:- A और B मिलकर एक कार्य को 12 दिनों में पूरा करते हैं। B और C मिलकर इसे 18 दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि A, C से तीन गुना अधिक कुशल है, तो B अकेले उसी कार्य को कितने समय में पूरा करेगा?
RRB NTPC CBT - I 27/02/2021 (Evening)
(a) 22 दिन (b) 25 दिन (c) 24 दिन (d) 20 दिन
हल :- प्रश्न के अनुसार,
दक्षता → A : C

@apna_pdf

3 : 1



प्रश्न के अनुसार

A , B , C की दक्षता का अनुपात (A : B : C) = 1.5 : 1.5 : 0.5

B द्वारा अकेले उसी कार्य को किया गया समय = $\frac{36}{1.5}$ = 24 दिन

Type - 4

यदि A किसी काम को x दिनों में कर सकता है और B, A से y% अधिक कुशल है तो -

B द्वारा अकेले लिया गया समय = $x \times \frac{100}{100+y}$ **दिन**

उदाहरण:- A एक निश्चित कार्य को 32 दिनों में पूरा कर सकता है। B, A से 60% अधिक कुशल है। B अकेले उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा कर सकता है?

RRC Group D 24/08/2022 (Morning)

(a) 10 दिन (b) 32 दिन (c) 15 दिन (d) 20 दिन

हल :-

B द्वारा अकेले लिया गया समय = $32 \times \frac{100}{100+60}$ दिन = 20 दिन

Exam hall approach: B, A से 60% अधिक कुशल है।

A : B की दक्षता = 5 : 8

कुल कार्य = 5 × 32 = 160 इकाई

B द्वारा अकेले लिया गया समय = $\frac{160}{8}$ = 20 दिन

Type - 5

- **यदि A और B एक काम को X दिनों में पूरा करते हैं, B और C उसी काम को Y दिनों में पूरा कर सकते हैं और C और A उस काम को Z दिनों में पूरा कर सकते हैं तो -**

A, B और C द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया कुल समय

= $(\frac{2XYZ}{XY+YZ+ZX})$ दिन .

उदाहरण :- A और B एक काम को 20 दिनों में पूरा कर सकते हैं, B और C उसी काम को 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं, जबकि C और A इसे 15 दिनों में पूरा कर सकते हैं। A, B और C मिलकर उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा कर सकते हैं?

RRC Group D 22/09/2022 (Evening)

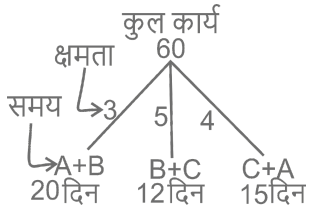
(a) 15 (b) 5 (c) 10 (d) 12

हल :- A, B और C द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया कुल समय

= $(\frac{2 \times 20 \times 12 \times 15}{20 \times 12 + 12 \times 15 + 15 \times 20})$ दिन .

= $(\frac{2 \times 20 \times 12 \times 15}{240 + 180 + 300})$ दिन = $(\frac{2 \times 20 \times 12 \times 15}{720})$ दिन = 10 दिन

Exam Hall Approach :-



2 (A + B + C) = 12

A + B + C की दक्षता = 6

कार्य पूरा करने में उनके द्वारा लिया गया समय = $\frac{60}{6}$ = 10 दिन

Type - 6

यदि A अकेले किसी कार्य को x दिनों में कर सकता है तथा A तथा B मिलकर उसी कार्य को y दिनों में कर सकते हैं तो B द्वारा अकेले पूरे कार्य को करने मे लगा समय = $(\frac{xy}{x-y})$ **दिन ।**

उदाहरण :- X और Y मिलकर किसी कार्य को 45 दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि Y अकेले इसे 180 दिनों में पूरा कर सकता है, तो X अकेले कितने दिनों में कार्य पूरा कर सकता है ?

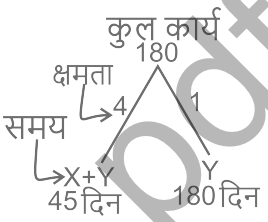
SSC MTS 11/05/2023 (Evening)

(a) 90 दिन (b) 40 दिन (c) 60 दिन (d) 80 दिन

हल :- कार्य को पूरा करने में X द्वारा अकेले लिया गया समय

= $(\frac{180 \times 45}{180-45})$ दिन = $(\frac{180 \times 45}{135})$ दिन = 60 दिन

Exam Hall Approach :-



X की दक्षता = 4 – 1 = 3 इकाई

आवश्यक समय = $\frac{180}{3}$ = 60 दिन

Type - 7

- **यदि A,** $\frac{p}{q}$ **कार्य को x दिनों में समाप्त कर सकता है, तो A द्वारा कार्य समाप्त करने में लिया गया कुल समय =** $\frac{q}{p} \times x$

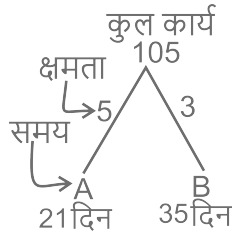
उदाहरण :- A किसी कार्य का $\frac{1}{3}$ भाग 7 दिनों में पूरा कर सकता है और B उसी कार्य का $\frac{2}{7}$ भाग 10 दिनों में पूरा कर सकता है। A और B दोनों मिलकर कार्य को कितने दिनों में पूरा कर सकते हैं?

SSC CGL 25/07/2023 (2nd shift)

(a) $12\frac{3}{8}$ (b) $11\frac{7}{8}$ (c) $13\frac{1}{8}$ (d) $15\frac{1}{7}$

हल :- A द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया समय = $\frac{3}{1} \times 7$ = 21 दिन

B द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया समय = $\frac{7}{2} \times 10$ = 35 दिन



अतः, A और B द्वारा कार्य पूरा करने में लिया गया समय

= $\frac{105}{8}$ = $13\frac{1}{8}$ दिन

@apna_pdf

Type - 8

• **यदि A किसी कार्य को पूरा करने में (A + B) द्वारा लिए गए समय से 'a' दिन अधिक लेता है और B उसी कार्य को करने में (A+ B) द्वारा लिए गए समय से 'b' दिन अधिक लेता है।**

तब (A + B) द्वारा मिलकर कार्य को पूरा करने में लिया समय = $\sqrt{ab}$ दिन

उदाहरण :- जब A अकेले कोई कार्य करता है, तो उसे A और B द्वारा मिलकर कार्य करने में लिए गए समय से 25 दिन अधिक लगते हैं। दूसरी ओर, A और B द्वारा एक साथ काम करने में लिए गए समय से B अकेले 16 दिन अधिक लेता है। A और B को एक साथ काम करते हुए काम पूरा करने में कितने दिन लगेंगे?

SSC CPO 04/10/2023 (1st Shift)

(a) 22 (b) 20 (c) 24 (d) 23

हल :- A और B द्वारा एक साथ कार्य पूरा करने में लिया गया समय

= $\sqrt{25 \times 16}$ = 20 दिन

Type - 9

कुछ दिन बाद या पहले काम छोड़ देना

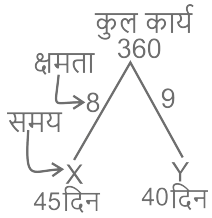
कुछ दिन बाद छोड़ना (Leaving after some days) :-

उदाहरण :- X और Y एक कार्य को क्रमशः 45 दिनों और 40 दिनों में कर सकते हैं। वे एक साथ काम करना शुरू करते हैं, लेकिन X, n दिनों के बाद कार्य छोड़ देता है और फिर Y शेष कार्य को 23 दिनों में पूरा करता है। n किसके बराबर है?

UPSC CDS - II (04/09/2022)

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 12

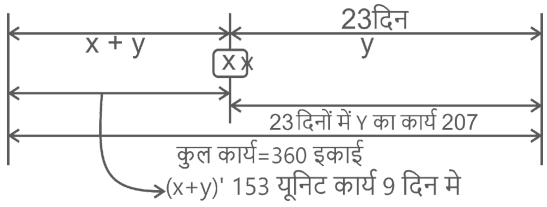
हल :-



x की दक्षता = 8 इकाई , y की दक्षता = 9 इकाई

x + y की दक्षता = 17 इकाई

नोट:- इस प्रकार के प्रश्नों को हम उलटे क्रम विधि (reverse approach) द्वारा हल करेंगे



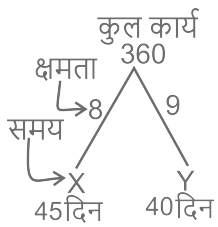
प्रश्न के अनुसार हम जानते हैं कि y ने शेष कार्य 23 दिनों में पूरा किया

23 दिन = 207 इकाई (23 × 9)

x + y द्वारा n दिनों में किया गया कार्य = 360 - 207 = 153 इकाई

तो, 'n' का मान = $\frac{153}{17}$ = 9 दिन

Exam Hall approach :-



X और Y मिलकर n दिनों तक कार्य करते हैं

फिर, उनके द्वारा n दिनों में किया गया कार्य = (8 + 9)n = 17n

बचा हुआ कार्य = 360 - 17n

प्रश्न के अनुसार,

$\frac{360 - 17n}{9}$ = 23 ⇒ 360 - 17n = 207 ⇒ n = $\frac{153}{17}$ = 9 दिन

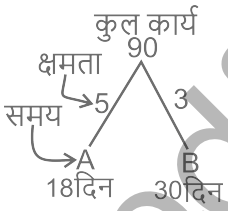
कुछ दिन पहले छोड़ना(Leaving before some days) :-

उदाहरण:- A और B व्यक्तिगत रूप से एक कार्य को क्रमशः 18 दिन और 30 दिन में पूरा कर सकते हैं। A और B ने एक साथ कार्य करना शुरू किया, लेकिन A ने कार्य पूरा होने के $16\frac{2}{3}$ दिन पहले कार्य छोड़ दिया और शेष कार्य B द्वारा अकेले पूरा किया गया । A ने कितने दिनों तक कार्य किया?

SSC CGL 20/07/2023 (1st shift)

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 3

हल :-

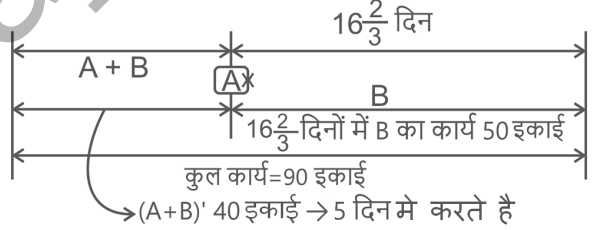


A की दक्षता = 5 इकाई

B की दक्षता = 3 इकाई

A +B की कुल दक्षता = 8 इकाई

नोट:- इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए, हम विपरीत दृष्टिकोण का उपयोग करते हैं



प्रश्न के अनुसार हम जानते हैं कि B ने शेष कार्य $16\frac{2}{3}$ दिन में पूरा किया

$16\frac{2}{3}$ दिन = 50 इकाई ($\frac{50}{3}$ × 3 = 50)

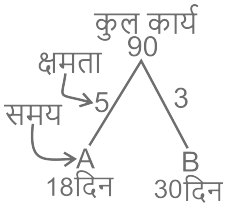
(A + B)द्वारा एक साथ किया गया कार्य = 90 - 50 = 40 इकाई

इसलिए ,

40 इकाई कार्य करने के लिए (A + B) द्वारा लिया गया समय = $\frac{40}{8}$

= 5 दिन

Exam Hall Approach :-



$16\frac{2}{3}$ दिन में B द्वारा किया गया कार्य = $\frac{50}{3}$ × 3

= 50 इकाई

बचा हुआ कार्य = 90 – 50 = 40 इकाई

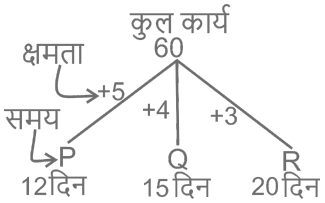
A और B द्वारा मिलकर किया गया कार्य = $\frac{40}{5+3}$ = 5 दिन

@apna_pdf

मिश्रित (Mixed)

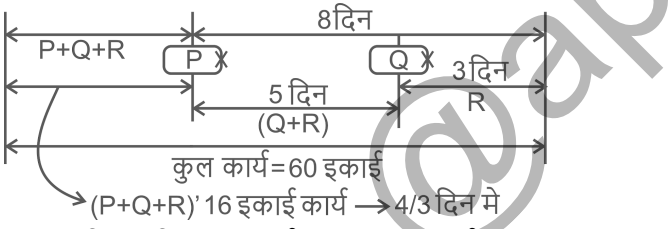
उदाहरण:- P, Q और R अकेले एक काम को क्रमशः 12, 15 और 20 दिनों में पूरा कर सकते हैं। उन्होंने एक साथ काम शुरू किया. P ने काम पूरा होने से 8 दिन पहले काम छोड़ दिया और Q ने P के जाने के 5 दिन बाद काम छोड़ दिया। R ने शेष कार्य अकेले पूरा किया। संपूर्ण कार्य को पूरा करने में कितने दिन लगेंगे?
SSC CHSL 15/03/2023 (4th Shift)
(a) $\frac{32}{3}$ दिन (b) 10 दिन (c) $\frac{28}{3}$ दिन (d) $\frac{25}{3}$ दिन

हल :-



यदि P , 8 दिन पहले काम नहीं छोड़ता तो उसके द्वारा 8 दिन मे किया गया कार्य = 8 × 5 = 40
यदि Q काम नहीं छोड़ता तो उसके द्वारा 3 दिन मे किया गया कार्य = 3 × 4 = 12
P और Q द्वारा किया गया कुल कार्य = 40 + 12 = 52
अतः P, Q, R द्वारा किया गया कुल कार्य = $\frac{60+52}{5+4+3} = \frac{112}{12}$
$= \frac{28}{3}$ दिन
अतः संपूर्ण कार्य को पूरा करने में लगा समय = $\frac{28}{3}$ दिन

Exam Hall Approach :
P की दक्षता = 5 इकाई
Q की दक्षता = 4 इकाई
R की दक्षता = 3 इकाई
नोट :- इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए, हम विपरीत दृष्टिकोण का उपयोग करते हैं।



R द्वारा 3 दिनों मे किया गया कार्य = 3 × 3 = 9 इकाई
(Q + R) द्वारा 5 दिनों मे किया गया कार्य = 5 × 7 = 35 इकाई
(P + Q + R) द्वारा किया गया कार्य = 60 - 44 = 16 इकाई
अतः 16 इकाई कार्य को (P + Q + R) द्वारा पूरा करने मे लिया गया समय
$= \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ दिन

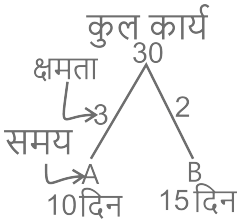
इसलिए , कुल कार्य को पूरा करने मे लिया गया समय = $3 + 5 + \frac{4}{3}$
$= 8 + \frac{4}{3} = \frac{28}{3}$ दिन

Type - 10

वैकल्पिक दिनों में कार्य करना
(Working on Alternate days)

उदाहरण:- A एक कार्य को 10 दिनों में पूरा कर सकता है जबकि B उसी कार्य को 15 दिनों में पूरा कर सकता है। यदि वे वैकल्पिक रूप से कार्य करें तो कार्य कितने दिनों में पूरा हो जाएगा? (दिया गया है: A काम शुरू करता है)

हल :-



2 दिन मे किया गया कार्य = 3 + 2 = 5 इकाई ,
5 इकाई कार्य = 2 दिन में
5 × 6 इकाई कार्य = 2 × 6 = 12 दिन

उदाहरण:- एक निश्चित कार्य करने के लिए, A और B वैकल्पिक दिनों में कार्य करते हैं, B पहले दिन कार्य शुरू करता है। A अकेले कार्य को 27 दिनों में पूरा कर सकता है। यदि कार्य $9\frac{1}{2}$ दिनों में पूरा हो जाता है, तो B अकेले उसी कार्य का 5 गुना आधी दक्षता के साथ कितने दिन मे पूरा कर सकता है:

हल :- प्रश्न के अनुसार , कार्य की शुरुआत B करेगा , वह 5 दिन काम करेगा, और A , $4\frac{1}{2}$ काम करेगा ,

$4\frac{1}{2}$ दिनों में A द्वारा किए गए कार्य का भाग = $\frac{9}{2 \times 27} = \frac{1}{6}$

5 दिनों में B द्वारा किए गए कार्य का भाग = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

कार्य पूरा करने में B द्वारा लिया गया समय = $5 \times \frac{6}{5} = 6$ दिन .

B द्वारा 5 गुने कार्य को आधी दक्षता से पूरा करने मे लिया गया समय = 6 × 5 × 2 = 60 दिन .

(जब हम क्षमता को $\frac{1}{2}$ लेते है , तब दिनों की संख्या को 2 से गुणा किया जाता है क्योंकि क्षमता और समय के व्युत्क्रमानुपाती होती हैं)

Type - 11

MDH सूत्र

MDH सूत्र का उपयोग अलग-अलग श्रमशक्ति (manpower) का उपयोग करके दो अलग-अलग समय पर किए गए एक ही प्रकृति के कार्यों की तुलना करने के लिए किया जाता है। MDH सूत्र को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$\frac{M_1 D_1 H_1 E_1}{W_1} = \frac{M_2 D_2 H_2 E_2}{W_2}$$

जहाँ ,
M = पुरुषों / महिलाओं की संख्या को दर्शाता है,
D = दिनों की संख्या को दर्शाता है,
H = एक दिन में घंटों की संख्या को दर्शाता है,
E = 1 आदमी की कार्यक्षमता को दर्शाता है, और
W = किए गए कार्य के भाग को दर्शाता है

उदाहरण:- 16 आदमी प्रतिदिन 6 घंटे काम करके 18 दिनों में 24 मीटर लंबी खाई खोद सकते हैं। 9 दिनों में 42 मीटर लंबी एक समान खाई खोदने के लिए कितने और पुरुषों को लगाया जाना चाहिए, प्रत्येक व्यक्ति अब प्रति दिन 12 घंटे काम कर रहा है?
Selection Post 30/06/2023 (3rd Shift)
(a) 14 (b) 10 (c) 12 (d) 9
हल:- मान लीजिए पुरुषों की आवश्यक संख्या = x
$\Rightarrow \frac{16 \times 18 \times 6}{24} = \frac{x \times 9 \times 12}{42} \Rightarrow x = \frac{2 \times 2 \times 42}{3 \times 1 \times 2}$ = 28 पुरुष
अतिरिक्त आवश्यक पुरुष = 28 − 16 = 12 पुरुष

@apna_pdf

उदाहरण:- एक समूह में 300 पुरुष हैं। उनके पास 30 दिन का खाना है। 10 दिनों के बाद, 100 और पुरुष समूह में शामिल हो गए। बचा हुआ खाना कितने दिनों तक चलेगा?
SSC MTS 04/05/2023 (Afternoon)
(a) 20 दिन (b) 10 दिन (c) 15 दिन (d) 12 दिन
हल :- प्रश्न के अनुसार,
माना दिनों की संख्या = x
$300 \times 20 = (300 + 100) \times x \Rightarrow x = 15$ दिन

उदाहरण:- 20 महिलाएं और 15 पुरुष मिलकर एक काम को 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं। उसी कार्य को पूरा करने में एक महिला को 150 दिन का समय लगता है। एक अकेला पुरुष उस कार्य को कितने दिनों में पूरा कर सकता है?
SSC CGL 25/07/2023 (4th shift)
(a) 450 (b) 225 (c) 350 (d) 210
हल :- दोनों पक्ष के कुल कार्य की तुलना करने पर
$(20W + 15M) \times 6 = (1W) \times 150$
$90M = 30W \Rightarrow \frac{M}{W} = \frac{1}{3}$
कुल कार्य $= (1W) \times 150 = 3 \times 150 = 450$ इकाई
एक पुरुष द्वारा कुल कार्य को पूरा करने मे लिया गया समय $= \frac{450}{1}$
$= 450$ दिन

उदाहरण:- 4 पुरुष और 7 महिलाएं एक काम को 8 दिनों में कर सकते हैं। 7 पुरुष और 4 महिलाएँ उसी कार्य को 5 दिनों में कर सकते हैं। उन दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें 8 महिलाएँ काम पूरा कर सकती हैं?
SSC CHSL 16/03/2023 (1st Shift)
(a) 60 दिन (b) 55 दिन (c) 40 दिन (d) 45 दिन
हल :- माना कि पुरुषों की दक्षता = M
महिलाओं की दक्षता = W
प्रश्न के अनुसार,
$8(4M + 7W) = 5(7M + 4W)$
$32M + 56W = 35M + 20W$
$36W = 3M \Rightarrow (\frac{M}{W})$ की दक्षता $= \frac{12}{1}$
अब, कुल कार्य $\rightarrow 8(4M + 7W)$
$= 8(4 \times 12 + 7 \times 1) \Rightarrow 440$ इकाई
फिर, 8 महिलाओं द्वारा लिया गया समय $= \frac{440}{8 \times 1} = 55$ दिन

Type - 12

यदि A पुरुष या B लड़के या C महिलाएँ एक निश्चित कार्य को m दिनों में कर सकते हैं तो x पुरुष, y लड़के, z महिलाओं द्वारा उसी कार्य को करने में लिया गया समय -

$= \frac{m}{\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C}}$ दिन

उदाहरण:- 6 पुरुष या 2 महिलाएं या 4 लड़के एक काम को 77 दिनों में पूरा कर सकते हैं। 1 पुरुष, 1 महिला और 1 लड़का मिलकर उसी काम को कितने दिन में पूरा करेंगे?
SSC CHSL 02/06/2022(Evening)
(a) 86 (b) 80 (c) 84 (d) 82
हल :- कार्य समाप्त करने में लिया गया समय
$= \frac{77}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{77}{\frac{11}{12}} = \frac{77 \times 12}{11} =$ 84 दिन

Exam hall approach:
6 पुरुष = 2 महिलाएँ, $\frac{\text{पुरुष}}{\text{महिलाएँ}} = \frac{1}{3}$
2 महिलाएँ = 4 लड़के, $\frac{\text{महिलाएँ}}{\text{लड़के}} = \frac{2}{1}$
अनुपात - लड़के : महिलाएँ : लड़के
क्षमता - 1 : 3 : **3**
2 : 2 : 1

अंतिम - 2 : 6 : 3
कुल कार्य = 2 × 6 × 77 इकाई
आवश्यक दिन $= \frac{2 \times 6 \times 77}{(2 + 6 + 3)} = 84$ दिन

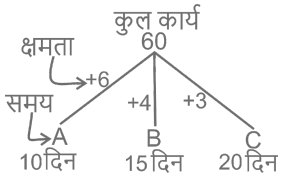
Type - 13

वेतन संबंधी प्रश्न

दक्षता $\propto$ वेतन $\propto \frac{1}{\text{लिया गया समय}}$

यदि A काम को x दिनों में कर सकता है और B उसी काम को y दिनों में कर सकता है और C काम को z दिनों में कर सकता है यदि वे एक साथ काम करते हैं और कुल मजदूरी W है, तो -
उनके वेतन का अनुपात = उनकी दक्षता का अनुपात $= \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$

उदाहरण:- A, B और C एक काम को क्रमशः 10 दिन, 15 दिन और 20 दिन में कर सकते हैं। उन्होंने उस काम को एक साथ पूरा किया और उन्हें मजदूरी के रूप में ₹2,600 मिले। C का वेतन ज्ञात कीजिए।
SSC CGL 20/07/2023 (2nd shift)
(a) ₹550 (b) ₹600 (c) ₹575 (d) ₹625
हल :-



प्रश्न के अनुसार
A, B, C की दक्षता का अनुपात (A : B : C) = 6 : 4 : 3
C का हिस्सा $= 2600 \times \frac{3}{6 + 4 + 3} =$ रु 600

उदाहरण :- X, Y और Z ने ₹3,400 की लागत से एक कार्य पूरा किया। X ने 5 दिन, Y ने 7 दिन और Z ने 10 दिन काम किया। यदि उनका दैनिक वेतन 4:5:3 के अनुपात में है, तो X को कितनी राशि प्राप्त होगी?
SSC CGL 20/07/2023 (4th shift)
(a) ₹700 (b) ₹900 (c) ₹800 (d) ₹600
हल :- उनके वेतन का अनुपात
X : Y : Z = 4 × 5 : 7 × 5 : 10 × 3
= 20 : 35 : 30
X द्वारा प्राप्त मजदूरी $= \frac{20}{85} \times 3400 =$ ₹ 800

@apna_pdf

पाइप और टंकी

पाइप और टंकी समय और कार्य का एक अनुप्रयोग मात्र हैं। अवधारणा के अनुसार, यह एक ही है। उपरोक्त आनुपातिकता में कार्यक्षमता को भरने की दर (rate of filling) से बदल दिया जाता है। इस मामले में समीकरण बन जाता है :

$$\text{भरने की दर} \propto \frac{1}{\text{लिया गया समय}}$$

छोड़े गए या भरे गए पानी की मात्रा = दर × समय

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए किए गए कार्य के प्रतिशत की अवधारणा का उपयोग किया जा सकता है।

प्रतिशत अवधारणा का उपयोग करने के लिए कुछ बुनियादी बातों को जानना आवश्यक है: जब यह कहा जाता है कि किसी ने काम किया है, तो इसका अर्थ है कि उसने 100% काम किया है। अत: यदि A, 4 दिनों में काम पूरा करता है, तो इसका अर्थ है- 4 दिनों में वह 100% काम करेगा। अत: वह एक दिन में कार्य का 25% ($\frac{100}{4}$) पूरा करता है। इसी प्रकार, 3 दिनों में वह 75% काम पूरा करता है।
पूर्ण कार्य को 1 इकाई भी माना जा सकता है। फिर यदि A, किसी कार्य को समाप्त करने में 4 दिन लेता है, तो इसका अर्थ है कि वह 1 दिन में कार्य का $\frac{1}{4}$ भाग समाप्त कर सकता है।

Type - 1

जब दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः x घंटे और y घंटे में भर सकते हैं, तो एक साथ खोलने पर टंकी को भरने में लगा समय -

या

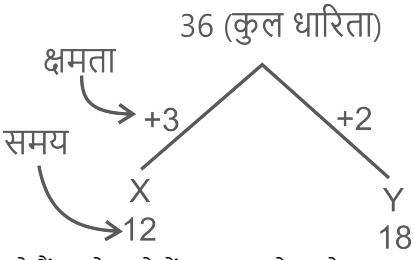
दो पाइप 'A' और 'B' एक टैंक को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में खाली कर सकते हैं। यदि दोनों पाइप एक साथ खुले हों, तो टंकी खाली करने में लगा समय - $\frac{x \times y}{x + y}$

उदाहरण :- दो पाइप X और Y एक टैंक को क्रमशः 12 मिनट और 18 मिनट में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइप एक साथ खोल दिए जाएं, तो टैंक को भरने में कितना समय लगेगा (मिनटों में)?
Selection Post 03/08/2022 (4th Shift)

(a) 15 (b) $\frac{5}{36}$ (c) 14 (d) $7\frac{1}{5}$

हल :- आवश्यक समय = $\frac{xy}{x+y} = \frac{12 \times 18}{12+18} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ मिनट

Exam Hall Approach :-

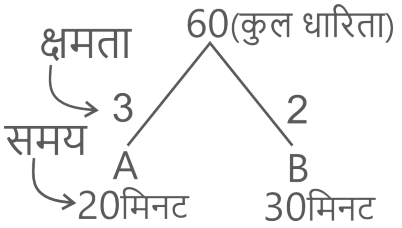


पूरे टैंक को भरने में (X + Y) को लगने वाला समय
$= \frac{36}{3+2} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ मिनट

उदाहरण:- दो पाइप A और B एक टैंक को क्रमश: 20 मिनट और 30 मिनट में भर सकते हैं। यदि शुरू में कुल समय के $\frac{1}{5}$ वे भाग के लिए केवल पाइप A को और शेष समय के लिए पाइप A और B दोनों को खुला रखा गया था, तो टैंक को भरने में दोनों पाइपों को कितने मिनट लगे होंगे ?
SSC CPO 15/03/2019 (Evening)

(a) $16\frac{5}{23}$ (b) $13\frac{1}{23}$ (c) $13\frac{5}{23}$ (d) $16\frac{1}{23}$

हल :-



माना कुल समय $5x$ है।
प्रश्न के अनुसार,

$3x + (5 \times 4x) = 60 \Rightarrow 23x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{23}$

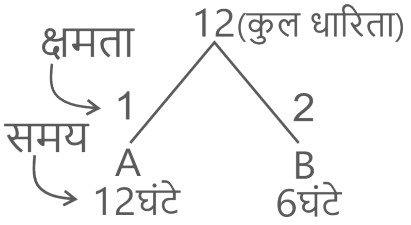
इसलिए,

कुल समय = $5x = 5 \times \frac{60}{23} = \frac{300}{23} = 13\frac{1}{23}$ मिनट

उदाहरण:- किसी टंकी का एक चौथाई भाग पाइप A के द्वारा 3 घंटे में तथा इसी टंकी का एक-तिहाई भाग पाइप B के द्वारा 2 घंटे में भरा जा सकता है। यदि दोनों पाइप चालू कर दिए जाते हैं, तो इस टंकी को भरने में कितना समय लगेगा ?
SSC CPO 14/03/2019 (Morning)

(a) 5 h (b) 2 h (c) 4 h (d) $2\frac{1}{2}$ h

हल :- टैंक का $\frac{1}{4}$वां भाग भरने के लिए A द्वारा लिया गया समय = 3 घंटे
A द्वारा पूरा टैंक भरने में लिया गया समय = 3 × 4 = 12 घंटे
टैंक का $\frac{1}{3}$वां भाग भरने के लिए B द्वारा लिया गया समय = 2 घंटे
B द्वारा पूरा टैंक भरने में लिया गया समय = 2 × 3 = 6 घंटे



माना टैंक की कुल क्षमता = 12 इकाई वांछित समय = $\frac{12}{1+2}$ = 4 घंटे

Type - 2

एक पाइप 'A' एक टैंक को 'x' घंटे में भर सकता है और 'B' टैंक को 'y' घंटे में खाली कर सकता है। जब दोनों पाइप एक साथ खोले जाते हैं तो

टंकी भरने में लगा समय = $\frac{xy}{y-x}$ घंटे... [y > x]

टंकी खाली करने में लगा समय = $\frac{xy}{x-y}$ घंटे...[x > y]

उदाहरण :- एक प्रवेश पाइप एक खाली टंकी को 51 घंटे में भर सकता है जबकि एक निकास पाइप एक पूरी तरह से भरी टंकी को 76.5 घंटे में खाली कर सकता है। यदि टंकी खाली होने पर दोनों पाइप एक साथ खोल दिए जाएं, तो टंकी कितने घंटो में पूरी भर जाएगी?
SSC CHSL 08/08/2023 (1st Shift)

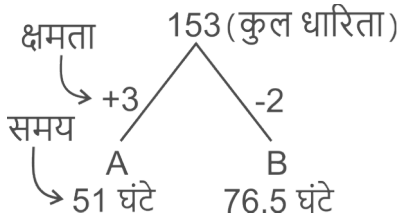
@apna_pdf

(a) 178.5 (b) 127.5 (c) 102 (d) 153

हल :- टंकी भरने में लगा समय

$= \frac{51 \times 76.5}{76.5 - 51} = \frac{51 \times 76.5}{25.5}$ = 153 घंटे

Exam Hall Approach :-



Aऔर B द्वारा को भरने में लिया गया आवश्यक समय = $\frac{153}{3-2}$ = 153 घंटे

Type - 3

दो पाइप A और B एक टंकी को क्रमशः x घंटे और y घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइपों को एक साथ खोला जाता है, तो कितने समय बाद पाइप B को बंद कर देना चाहिए ताकि टैंक t घंटे में भर जाए = $[y\ (1 - \frac{t}{x})]$घंटे

उदाहरण :- दो पाइप A और B एक टैंक को क्रमशः 27 मिनट और 36 मिनट में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइप एक साथ खोले जाएं, तो कितने समय बाद B को बंद कर देना चाहिए ताकि टंकी 21 मिनट में भर जाए?

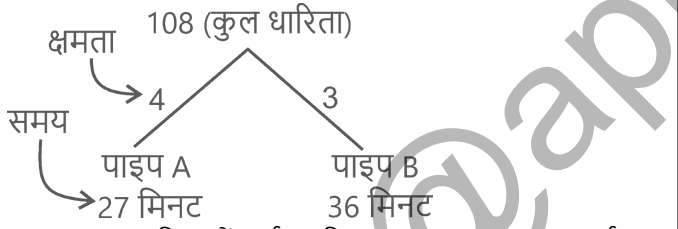
DDA JE (Civil) 29/03/2023 (Evening)

(a) 9 मिनट (b) 7 मिनट (c) 6 मिनट (d) 8 मिनट

हल :- अभीष्ट समय = $[y\ (1 - \frac{t}{x})]$

= $[36(1 - \frac{21}{27})] = 36 \times \frac{2}{9}$ = 8 मिनट

Exam Hall Approach :



पाइप A द्वारा 21 मिनट में कार्य पूरा किया गया = 21 × 4 = 84 इकाई

शेष कार्य = 108 − 84 = 24 इकाई

आवश्यक समय = $\frac{24}{3}$ = 8 मिनट

Type - 4

यदि पाइप A एक टंकी को X घंटे में भर सकता है, पाइप B उसी टंकी को Y घंटे में भर सकता है, और पाइप C पूरी टंकी को Z घंटे में खाली कर सकता है, तो टंकी को पूरी तरह भरने में कितना समय लगेगा, यदि पाइप A, B और C एक साथ खोले जाते हैं।

= $\frac{XYZ}{YZ + ZX - XY}$

उदाहरण :- P एक टंकी को 5 घंटों में भर सकता है। Q उसी टंकी को 10 घंटों में भर सकता है। R उसी टंकी को 20 घंटे में खाली करता है। तीनो मिलकर उसी टंकी को भरने में कितना समय लेंगे ?

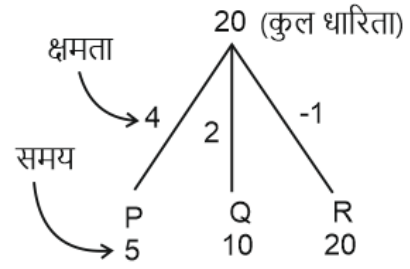
SSC CHSL 13/03/2023 (2nd Shift)

(a) 6 घंटे (b) 4 घंटे (c) 10 घंटे (d) 5 घंटे

हल :- t = $\frac{5\times 10\times 20}{20\times 10 + 20\times 5 - 5\times 10}$ = $\frac{1000}{200 + 100 - 50}$

= $\frac{1000}{250}$ = 4 घंटे

Exam Hall Approach :-



कुल दक्षता = 4 + 2 + (-1) = 5 इकाई

P, Q और R द्वारा टंकी को भरने में लगा कुल समय = $\frac{20}{5}$ = 4 घंटे

Type - 5

यदि a, b, c..... सभी नल एक साथ खोले जाएं, तो टैंक को भरने/खाली करने में आवश्यक समय होगा:

$\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \pm \frac{1}{c} \pm$ ..... = $\frac{1}{T}$

जहाँ T आवश्यक समय है।

नोट :- सकारात्मक परिणाम = टैंक भरने के लिए

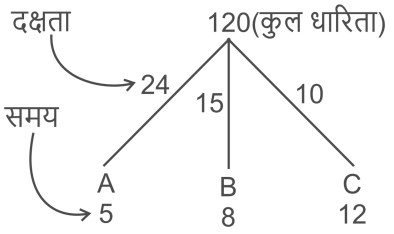
नकारात्मक परिणाम = टैंक खाली करने के लिए ।

उदाहरण:- तीन पाइप A , B और C एक टंकी को क्रमशः 5 घंटे, 8 घंटे और 12 घंटे में भर सकते हैं। यदि सभी पाइप एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा ?

RRC Group D 05/09/2022 (Morning)

(a) $4\frac{22}{49}$ घंटा (b) $2\frac{22}{49}$ घंटा (c) $5\frac{22}{49}$ घंटा (d) $3\frac{22}{49}$ घंटा

हल :-



पाइप (A + B + C) द्वारा टंकी को भरने में लिया गया समय = $\frac{120}{49}$

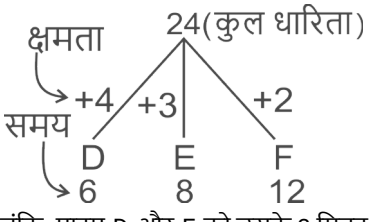
= $2\frac{22}{49}$ घंटे

उदाहरण:- तीन पाइप, D, E और F, एक टैंक को क्रमशः 6 मिनट, 8 मिनट और 12 मिनट में भर सकते हैं। सभी पाइप एक साथ खोले जाते हैं और फिर पाइप D और E को टैंक भरने से 3 मिनट पहले बंद कर दिया जाता है। टंकी कितने समय (मिनट में) में भर जाएगी ?

SSC MTS 07/07/2022 (Evening)

(a) 5 (b) 3 (c) 6 (d) 4

हल :-



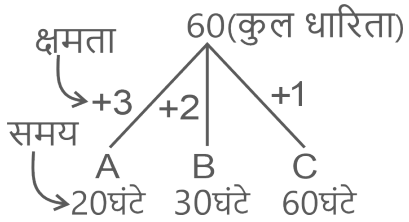
चूंकि, पाइप D और E को उसके 3 मिनट पहले बंद कर दिया जाता है, उस समय केवल पाइप F खोला जाता है।

@apna_pdf

अतः पाइप F द्वारा टंकी को भरने में किया गया कार्य = 2 × 3 = 6 इकाई
शेष कार्य = 24 - 6 = 18 इकाई
अब, शेष कार्य को पूरा करने में D, E, F द्वारा एक साथ लिया गया समय
$= \frac{18}{9}$ = 2 मिनट
अत: पूरी टंकी को भरने में लगा समय = 2 मिनट + 3 मिनट = 5 मिनट

उदाहरण :- पाइप A, B और C एक टंकी को क्रमशः 20, 30 और 60 घंटे में भर सकते हैं। पाइप A, B और C उसी दिन क्रमशः सुबह 7 बजे, सुबह 8 बजे और सुबह 9 बजे खोले जाते हैं। टंकी कब भरेगी?
SSC CGL Tier II (03/02/2022)
(a) 4:40 शाम (b) 5:40 शाम (c) 6:20 शाम (d) 7:20 शाम

हल :-



A द्वारा अकेले सुबह 9 बजे तक भरा गया टंकी = 2 × 3 = 6 इकाई
B द्वारा अकेले सुबह 9 बजे तक भरा गया टंकी = 1 × 2 = 2 इकाई
सुबह 9 बजे तक भरा गया कुल टंकी = 6 + 2 = 8 इकाई
भरने के लिए टंकी का बचा हुआ हिस्सा = 60 − 8 = 52 इकाई
A, B और C द्वारा लिया गया समय = $\frac{52}{3+2+1}$
$= 8\frac{2}{3}$ घंटे = 8 घंटे 40 मिनट
तो, समय जब टंकी भर जाएगी = सुबह 9 बजे + 8 घंटे 40 मिनट
= शाम 5 : 40 बजे।

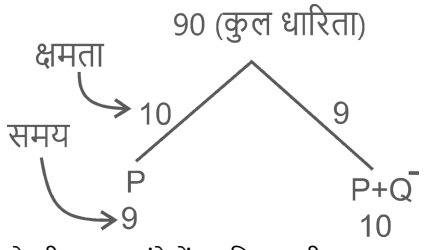
Type - 6

यदि एक पाइप किसी टैंक को x घंटे में भरता है लेकिन टैंक में रिसाव के कारण इसे भरने में 't' घंटे अधिक लगते हैं। यदि टंकी पूरी तरह भर गई है, तो टंकी को खाली करने में (रिसाव के कारण) लगा समय ?
$= \frac{x(x+t)}{t}$

उदाहरण:- एक टंकी 9 घंटे में भरी जा सकती है। लेकिन रिसाव के कारण इसमें एक घंटा अधिक लग जाता है. यदि टंकी भरी हुई है तो रिसाव के कारण कितने समय में खाली हो जाएगी?
(a) 60 घंटे (b) 30 घंटे (c) 90 घंटे (d) 75 घंटे

हल :- पूरी टंकी को खाली करने में लगने वाला समय
$= \frac{x(x+t)}{t} = \frac{9(9+1)}{1}$ = 90 घंटे

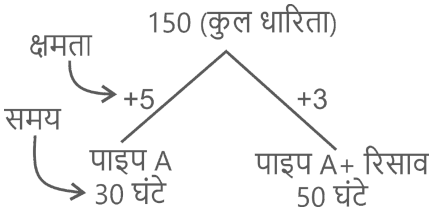
Exam Hall Approach : टैंक भरने वाला पाइप = P, रिसाव पाइप = Q



तो, लीक(Q) 1 घंटे में 1 यूनिट खाली कर सकता है।
लीक (Q) द्वारा टैंक को खाली करने में लिया गया समय = $\frac{90}{1}$ = 90 घंटे

उदाहरण:- एक पाइप एक टंकी को 30 घंटे में भर सकता है। तली में रिसाव के कारण यह 50 घंटे में भर जाता है। रिसाव के कारण पूरी तरह भरे हुए टैंक को खाली होने में कितना समय (घंटों में) लगेगा?
SSC CGL 24/07/2023 (2nd shift)
(a) 60 घंटे (b) 85 घंटे (c) 70 घंटे (d) 75 घंटे

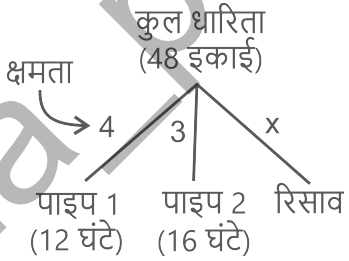
हल :-



रिसाव की क्षमता = 5 − 3 = 2 इकाई
रिसाव के कारण भरी हुई टंकी को खाली करने में लगा समय = $\frac{150}{2}$
= 75 घंटे

उदाहरण:- दो पाइप एक टंकी को क्रमशः 12 घंटे और 16 घंटे में भर सकते हैं। पाइपों को एक साथ खोला जाता है और पाया जाता है कि तली में रिसाव के कारण टंकी को भरने में 90 मिनट अधिक लगते हैं। रिसाव के कारण पूरी तरह भरे हुए टैंक को खाली होने में कितना समय लगेगा?
SSC CPO 04/10/2023 (3rd Shift)
(a) $39\frac{13}{49}$ घंटे (b) $36\frac{29}{49}$ घंटे (c) $37\frac{15}{49}$ घंटे (d) $38\frac{10}{49}$ घंटे

हल :-



प्रश्न के अनुसार, $\frac{48}{(7-x)} - \frac{48}{7} = \frac{3}{2} \Rightarrow 32x = 7(7 - x)$
रिसाव की क्षमता $(x) = \frac{49}{39}$ इकाई
अत: आवश्यक समय = $\frac{48}{\frac{49}{39}} = \frac{48 \times 39}{49} = 38\frac{10}{49}$ दिन

Type - 7

यदि दो पाइप A और B एक टैंक को इस प्रकार भर सकते हैं कि A की दक्षता B से x गुना है और टैंक को भरने में B से t मिनट कम/अधिक लगता है, तो दोनों पाइपों द्वारा एक साथ टैंक को भरने में लगने वाला समय = $\frac{xt}{(x^2-1)}$

उदाहरण :- पाइप A, पाइप B से 3 गुना तेज है। दोनों पाइप मिलकर एक टैंक को 36 मिनट में भरते हैं। पाइप A अकेले टैंक को भरने में कितना समय लेगा ?
RRC Group D 25/08/2022 (Morning)
(a) 80 मिनट (b) 100 मिनट (c) 156 मिनट (d) 48 मिनट

हल :-
$36 = \frac{3 \times t}{(9-1)} \Rightarrow$ t = 96 मिनट (समय का अंतर)
A : B = 3 : 1 (दक्षता) ⇒ A : B = 1 : 3 (समय)
2 = 96 ⇒ (A)1 = 48 मिनट

Exam Hall approach:-
A : B की क्षमता = 3 : 1
कुल कार्य = (3 + 1) × 36 = 144

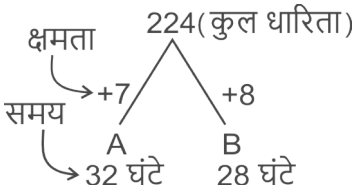
@apna_pdf

अकेले पाइप A द्वारा टंकी को भरने में लगा समय = 144 ÷ 3 = 48 मिनट

Type - 8

पाइपो के बारी बारी से चलने पर :-

उदाहरण :- एक टैंक से दो इनलेट A और B जुड़े हुए हैं। A और B टैंक को क्रमशः 32 घंटे और 28 घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइपों को A से शुरू करते हुए, बारी - बारी से, 1 घंटे के लिए खोला जाता है, तो टैंक कितने समय में (घंटों में, निकटतम पूर्णांक तक) भर जाएगा ?
SSC CGL Tier II (03/03/2023)
(a) 22 (b) 30 (c) 36 (d) 24
हल :-



A और B पाइपों को बारी-बारी से 1 घंटे के लिए खोला जाता है।
2 घंटे में किया गया कार्य = 7 + 8 = 15 इकाई
इसी प्रकार, 29 घंटे में किया गया कार्य = $(15 \times 14) + 7 = 217$ इकाई
30वें घंटे में काम पूरा हो जाएगा।

Type - 9

MDH formula

MDH सूत्र का उपयोग विभिन्न जनशक्ति का उपयोग करके दो अलग-अलग समय पर किए गए समान प्रकृति के कार्यों की तुलना करने के लिए किया जाता है। MDH सूत्र को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है।

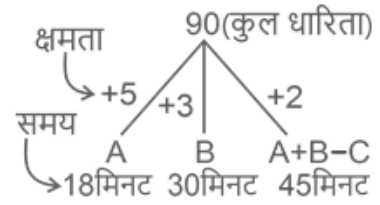
$$\frac{M_1 D_1 H_1 E_1}{W_1} = \frac{M_2 D_2 H_2 E_2}{W_2}$$

जहाँ,
M = पुरुषों/महिलाओं की संख्या को दर्शाता है,
D = दिनों की संख्या को दर्शाता है,
H = एक दिन में घंटों की संख्या दर्शाता है,
E = 1 आदमी की दक्षता को दर्शाता है,
W = किये गये कार्य के भाग को दर्शाता है

उदाहरण:- 6 पाइप, प्रतिदिन 10 घंटे कार्य करके, एक टंकी को 3 दिनों में खाली कर सकते हैं। एक दिन में टंकी को खाली करने के लिए 9 पाइपों को दिन में कितने घंटे काम करना होगा?
Delhi Police H.C.M. 17/10/2022 (Morning)
(a) 18 (b) 20 (c) 12 (d) 22
हल:- माना आवश्यक समय x है
प्रश्न के अनुसार, $6 \times 10 \times 3 = 9 \times 1 \times x$
$180 = 9x \Rightarrow x = \frac{180}{9} = 20$

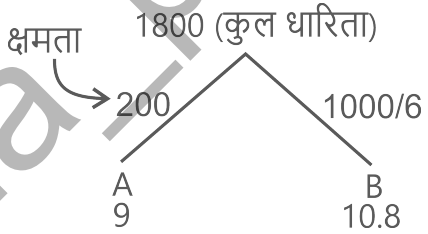
Type - 10

उदाहरण :- पाइप A और B एक टैंक को क्रमशः 18 मिनट और 30 मिनट में भर सकते हैं। टैंक से जुड़ा पाइप C, प्रति मिनट 125 लीटर पानी निकाल सकता है। यदि सभी पाइपों को एक साथ खोल दिया जाए, तो टंकी 45 मिनट में भर जाती है। लीटर में टैंक की क्षमता है:
SSC MTS 14/10/2021(Evening)
(a) 1500 (b) 1375 (c) 1875 (d) 2000
हल :-



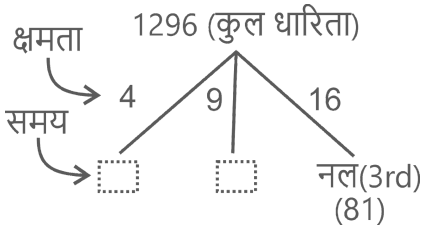
C की क्षमता = 5 + 3 - 2 = 6 इकाई
अत: C द्वारा पूरे टैंक को खाली करने के लिए लिया गया समय = $\frac{90}{6}$
= 15 मिनट
C द्वारा 1 मिनट में निकाला गया पानी = 125 लीटर
C द्वारा 15 मिनट में निकाला गया पानी = 125 × 15 = 1875 लीटर
टैंक की क्षमता = 1875 लीटर

उदाहरण:- दो पाइप, A और B, 1000 लीटर की एक टंकी को क्रमशः 5 घंटे और 6 घंटे में भर सकते हैं। यदि उन्हें एक साथ खोला जाए, तो 1800 लीटर की खाली टंकी को भरने में उन्हें कितने घंटे लगेंगे?
RRC Group D 24/08/2022 (Evening)
(a) $\frac{25}{11}$ (b) $\frac{54}{11}$ (c) $\frac{45}{11}$ (d) $\frac{52}{11}$
हल :- पाइप A 5 घंटे में 1000 लीटर पानी भर सकता है
यह 9 घंटे में 1800 लीटर का टैंक भर देगा
पाइप B 6 घंटे में 1000 लीटर भर सकता है
यह 10.8 घंटे में 1800 लीटर का टैंक भर देगा



A और B की दक्षता = $200 + \frac{1000}{6} = \frac{1100}{3}$
पाइप A और पाइप B टैंक को भरेंगे $\frac{1800 \times 3}{1100} = \frac{54}{11}$ घंटे में

उदाहरण:- क्रमशः 2 सेमी, 3 सेमी और 4 सेमी व्यास के तीन नल हैं। उनमें बहने वाले पानी का अनुपात उनके व्यास के वर्ग के अनुपात के बराबर है। सबसे बड़ा नल अकेले टंकी को 81 मिनट में भर और खाली कर सकता है। यदि सभी नल एक साथ खोल दिए जाएं, तो टंकी को भरने में कितना समय (मिनट में) लगेगा?
SSC CGL Tier II (02/03/2023)
(a) $34\frac{20}{29}$ (b) $64\frac{20}{29}$ (c) $54\frac{20}{29}$ (d) $44\frac{20}{29}$
हल :- प्रश्न के अनुसार,
पाइप के व्यास के α वर्ग के बराबर तीन नल की दक्षता
दक्षता का अनुपात = $(2)^2 : (3)^2 : (4)^2$
= 4 : 9 : 16



तीनों नल द्वारा एक साथ लिया गया कुल समय = $\frac{\text{कुल क्षमता}}{\text{कुल दक्षता}}$

@apna_pdf

$= \frac{1296}{(4+9+16)} = \frac{1296}{29} = 44\frac{20}{29}$ मिनट

Type - 11

उदाहरण:- पाइप K एक पानी की टंकी को 10 घंटे में भर सकता है। पानी की टंकी खाली होने पर पाइप K को अकेले खोला जाता है। जब पाइप K द्वारा पानी की टंकी को आधा भर दिया जाता है, तो 4 समान पाइप और खोल दिए जाते हैं। पानी की टंकी को भरने में कुल कितना समय लगेगा ?
RRC Group D 07/10/2022 (Evening)
(a) 6 घंटे 15 मिनट (b) 7 घंटे 15 मिनट (c) 6 घंटे 45 मिनट (d) 6 घंटे

हल :- माना टैंक की कुल क्षमता = 20 इकाई

पाइप K की क्षमता = $\frac{20}{10}$ = 2

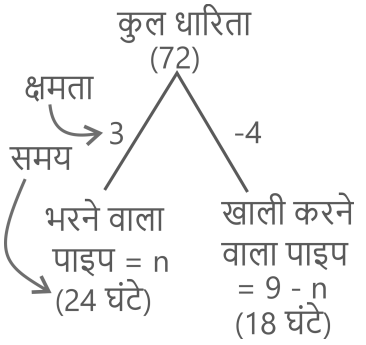
आधी टंकी को भरने में लगा समय = $\frac{10}{2}$ = 5 घंटे

शेष क्षमता = 20 – 10 = 10 इकाई
4 और समान पाइपों के साथ कुल दक्षता = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10
शेष टैंक को भरने के लिए सभी 5 पाइपों द्वारा लिया गया समय

= $\frac{10}{10}$ = 1 घंटा, कुल समय = 5 + 1 = 6 घंटे

उदाहरण :- नौ पाइप एक टैंक से जुड़े हुए हैं, जिनमें से कुछ पाइप टैंक को खाली कर रहे हैं और कुछ पाइप टैंक को भर रहे हैं। प्रत्येक भरने वाला पाइप खाली टैंक को 24 घंटों में भर सकता है, जबकि प्रत्येक खाली करने वाला पाइप 18 घंटे में पूरी तरह से टैंक को खाली कर सकता है। यदि टैंक पूरी तरह भरा हुआ है और सभी पाइप एक साथ खोले जाते हैं, तो टैंक 9 घंटे में खाली हो जाता है। टैंक को खाली करने वाले पाइपों की संख्या है:
UP Constable 26/10/2018 (1st Shift)
(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 3

हल :-



प्रशानुसार,
चूंकि टैंक पूरी तरह से भरा हुआ है जो कि 72 इकाई है
अब दोनों पाइप खोल दिए गए हैं
तथा 9 घंटे में खाली हो जाता है
72 + [(3 × n) - 4(9 - n)] × 9 = 0
[(3 × n) - 4(9 - n)] × 9 = - 72
[3n - 36 + 4n] = - 8 ⇒ 7n = - 8 + 36 ⇒ 7n = 28 ⇒ n = 4
टैंक को खाली करने वाले पाइपों की संख्या है = 9 - n = 9 - 4 = 5

@apna_pdf

समय,चाल और दूरी

गति को इकाई समय में तय की गई दूरी के रूप में परिभाषित किया गया है।

दूरी = गति × समय

इकाई रूपांतरण

किमी/घंटा से मीटर/सेकंड	किमी / घंटा $\xrightarrow{\times \frac{5}{18}}$ मीटर/ सेकंड **i.e.** 90किमी/घंटा = $90 \times \frac{5}{18}$ मीटर/सेकंड = 25 मीटर/सेकंड
मीटर/सेकंड से किमी/घंटा	मीटर/ सेकंड $\xrightarrow{\times \frac{18}{5}}$ किमी / घंटा **i.e.** 25 मीटर/सेकंड = $25 \times \frac{18}{5}$ किमी/घंटा = 90किमी/घंटा

नोट :-

1 घंटे = 60 मिनट = 3600 सेकंड

1 यार्ड = 3 फीट

1 मील = 1. 609 किलोमीटर

उदाहरण :- एक गोली 0.2 सेकंड में 90 मीटर की दूरी तय करती है। इसकी गति किमी/घंटा में ज्ञात कीजिए।

RRB ALP Tier - II (23/01/2019) Morning

(a) 125 (b) 1,620 (c) 162 (d) 1,250

हल :- गोली की चाल = $\frac{90}{0.2}$

= 450 मीटर/सेकंड = $450 \times \frac{18}{5}$ = 1620किमी/घंटा

- जब चाल की इकाई km/h में प्रयोग करते है तो यह ध्यान रखें की समय की इकाई भी घंटे में होने चाहिए। जब चाल की इकाई m/s में प्रयोग करते है तो समय की इकाई भी सेकंड में होनी चाहिए। अर्थात चाल और समय की इकाई सामान हो।

उदाहरण :- एक कार की गति 90 किमी/घंटा है। 7 सेकंड में कार द्वारा तय की गई दूरी होगी:

SSC MTS 05/09/2023 (1st Shift)

(a) 172 मीटर (b) 175 मीटर (c) 170 मीटर (d) 180 मीटर

हल :- आवश्यक दूरी

= $90 \times \frac{5}{18} \times 7$ = 175 मीटर

उदाहरण :- एक व्यक्ति दिल्ली से चंडीगढ़ की 300 km की दूरी को 50 km/hr की गति से पूरा करता है। उसे कितना समय लगेगा?

हल :- यहाँ, हमें दिया गया है, दूरी (D) = 300 km और गति (s) = 50 km/h.

∴ समय $(T) = \frac{D}{S} = \frac{300}{50}$ = 6 घंटे

कुछ महत्वपूर्ण स्थिति

स्थिति 1 :- यदि दूरी → स्थिर है तो गति $\alpha \frac{1}{\text{समय}}$

स्थिति 2 :- यदि गति → स्थिर है तो दूरी α समय

स्थिति 3 :- यदि समय → स्थिर है तो दूरी α गति

उदाहरण :- समान दूरी के लिए, यात्रा पर जाते समय गति 50 km/h और वापसी में गति 60 km/h है। लिए गए समय का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल :- यहाँ दूरी स्थिर है।

अतः, गति $\alpha \frac{1}{\text{समय}}$

इसलिए, आवश्यक अनुपात = $\frac{1}{50} : \frac{1}{60} = \frac{6}{300} : \frac{5}{300}$ = 6 : 5

उदाहरण :- यदि तीन कारों द्वारा एक निश्चित दूरी तय करने में लिए गए समय का अनुपात 2 : 3 : 5 है, तो इन कारों की गति का अनुपात होगा:

SSC MTS 11/09/2023 (1st Shift)

(a) 10 : 6 : 15 (b) 15 : 9 : 8 (c) 10 : 15 : 8 (d) 15 : 10 : 6

हल :- लिये गये समय का अनुपात = 2 : 3 : 5

जैसा कि हम जानते हैं

गति $\alpha \frac{1}{\text{समय}}$

अतः, गति का अनुपात

= $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$ = 15 : 10 : 6

उदाहरण :- उसी समय में, A और B द्वारा क्रमशः 6 km/h और 8 km/h की गति से तय की गई दूरी का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल :- यदि समय → स्थिर है तो दूरी α गति

गति → 6 : 8

दूरी → 6 : 8

इसलिए, अभीष्ट अनुपात = 6 : 8 = 3 : 4

औसत गति

a) जब हर बार अलग-अलग दूरी तय की जाती है,

औसत गति = $\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}}$

i.e. d_1 ($t_1 = d_1/v_1$), d_2 ($t_2 = d_2/v_2$), d_3 ($t_3 = d_3/v_3$)

औसत गति = $\frac{d_1 + d_2 + d_3}{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3}}$

उदाहरण :- एक कार पहले 210 किमी की दूरी 70 किमी/घंटा की गति से

@apna_pdf

तय करती है। इसने अगले 170 किमी की दूरी 85 किमी/घंटा की गति से तय की। इसकी औसत गति(किमी/घंटा) क्या है?

SSC CHSL 08/08/2023 (4th Shift)

(a) 72 (b) 76 (c) 74 (d) 68

हल :- औसत गति $= \frac{210+170}{\frac{210}{70}+\frac{170}{85}} = \frac{380}{5} = 76$ किमी/घंटा

उदाहरण :- एक व्यक्ति 3 किमी/घंटा की गति से 11 किमी, 5 किमी/घंटा की गति से 21 किमी और 10 किमी/घंटा की गति से 37 किमी की दूरी तय करता है। पूरी यात्रा के लिए औसत गति (किमी/घंटा) ज्ञात कीजिए

Selection Post 28/06/2023 (4th Shift)

(a) $5\frac{335}{347}$ (b) $5\frac{235}{247}$ (c) $5\frac{347}{335}$ (d) $5\frac{135}{347}$

हल :- औसत गति $= \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} = \frac{11+21+37}{\frac{11}{3}+\frac{21}{5}+\frac{37}{10}}$

$= \frac{69\times 30}{110+126+111} = \frac{2070}{347} = 5\frac{335}{347}$

b) जब किसी वस्तु द्वारा अलग - अलग चाल a और b से , समान दूरी तय की जाती है तो ,

औसत गति $= \frac{2ab}{a+b}$, जहां a और b गति हैं।

उदाहरण :- एक व्यक्ति बिंदु A से बिंदु B तक 30 km/h की गति से यात्रा करता है और 20 km/h की गति से वापस आता है। उसकी औसत गति क्या है?

हल :- यहाँ, तय की गई दूरी समान है,

इसलिए, औसत गति $= \frac{2\times 30\times 20}{30+20} = \frac{1200}{50} = 24$ km/h

जब किसी वस्तु द्वारा अलग - अलग चाल a b और c से , समान दूरी तय की जाती है तो ,

औसत गति $= \frac{3abc}{ab+bc+ac}$, जहां a, b और c गति हैं।

उदाहरण :- गोपाल A से B तक 5 किमी/घंटा की गति से, B से C तक 10 किमी/घंटा की गति से और C से D तक 15 किमी/घंटा की गति से यात्रा करता है। यदि AB = BC = CD है, तो गोपाल की औसत गति ज्ञात कीजिए।

SSC CHSL 09/06/2022 (Afternoon)

(a) $8\frac{2}{11}$ (b) $70\frac{2}{11}$ (c) $60\frac{2}{11}$ (d) $9\frac{2}{11}$

हल :- जब दूरी समान तब औसत गति $= \frac{3\,xyx}{x\times y+y\times z+z\times x}$

पूरी यात्रा में गोपाल की औसत गति $= \frac{3\times 5\times 10\times 15}{5\times 10+10\times 15+15\times 5}$

$= \frac{2250}{50+150+75} = \frac{2250}{275} = \frac{90}{11} = 8\frac{2}{11}$ किमी/घंटा

Type - 1

उदाहरण :- A को एक निश्चित गति से 15 किमी की दूरी तय करने में B से 30 मिनट अधिक लगते हैं। लेकिन यदि A अपनी गति दोगुनी कर देता है, तो उसे समान दूरी तय करने में B से एक घंटा कम लगता है। B की गति (किमी/घंटा में) क्या है?

SSC CGL 04/06/2019 (Afternoon)

(a) 6 (b) 5 (c) $6\frac{1}{2}$ (d) $5\frac{1}{2}$

हल :- माना A और B की गति क्रमशः a और b है,

ATQ:

$\frac{15}{a} - \frac{15}{b} = \frac{1}{2}$ ---- (i)

और, $\frac{15}{b} - \frac{15}{2a} = 1$ ---- (ii)

(i) और (ii) जोड़ने पर $\frac{15}{2a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 5$

समी(i) में a का मान रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$3 - \frac{15}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 6\ km/h$

Exam Hall approach :-

यहाँ, दूरी स्थिर है, इसलिए
गति का अनुपात (A) = 1 : 2
फिर समय का अनुपात(A) = 2 : 1

समय अंतर 1 इकाई = $\frac{3}{2}$ घंटे,

तो A द्वारा लिया गया समय = 2 इकाई = 3 घंटे

,

अब B द्वारा लिया गया समय = 2.5 घंटे

अतः B की गति = $\frac{15}{2.5}$ = 6 किमी/घंटा

Type - 2

A और B ने क्रमशः X से Y और Y से X तक अपनी यात्रा शुरू की। एक दूसरे को पार करने के बाद, A और B ने यात्रा का शेष भाग क्रमशः 'a' घंटे और 'b' घंटे में पूरा किया। यदि A की गति x किमी/घंटा है और B की गति y किमी/घंटा है

$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

उदाहरण :- विपरीत दिशाओं में यात्रा कर रहे दो मोटर चालक बीच में एक ही बिंदु पर मिलते हैं। इसके बाद उन्हें अपने गंतव्य तक पहुंचने में 9 और 16 घंटे का समय लगता है। उनकी गति का अनुपात क्या है?

RRB JE 28/05/2019 (Morning)

(a) 5 : 4 (b) 4 : 7 (c) 4 : 3 (d) 5 : 3

हल :- हम जानते हैं कि → गति $\propto \frac{1}{\text{समय}}$

$\frac{S1}{S2} = \sqrt{\frac{T2}{T1}} \Rightarrow \frac{S1}{S2} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{S1}{S2} = \frac{4}{3}$

Type - 3

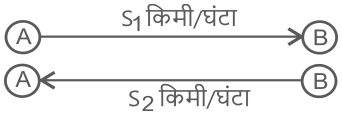
जब दूरी स्थिर हो और कुल समय या समय के अंतर के साथ दो गति दी गई हो :-

समय के अंतर को कुछ ट्रिक से हल किया जा सकता है

जल्दी , जल्दी केस	' - '
देर , देर केस	' - '
जल्दी, देर केस	' + '
देर , जल्दी केस	' + '

@apna_pdf

a). जब एक आदमी एक निश्चित दूरी s_1 किमी/घंटा की गति से तय करता है औरs_2 किमी/घंटा की गति से वापस आता है । और पूरी यात्रा को पूरा करने में उसे 't' घंटा लगता है: तो तय की गई कुल दूरी



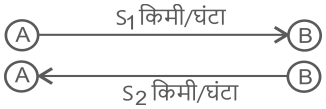
दूरी= $\frac{S_1 \times S_2}{S_1 + S_2} \times$ कुल समय

उदाहरण :- एक व्यक्ति एक निश्चित दूरी रेलगाड़ी से 25 km/h की गति से तय करता है और 3 km/h की गति से वापस चलता है। पूरी यात्रा में 5 घंटा 36 मिनट का समय लगा। उसने रेलगाड़ी से कितनी दूरी तय की ?

हल :- D = $(\frac{25 \times 3}{25 + 3}) \times \frac{28}{5}$ = 15 किमी

b). तय की गई कुल दूरी जब एक व्यक्ति s_1 km/h के साथ एक निश्चित दूरी तय करता है और वह s_2 km/h की गति से वापस आता है। यदि उसे वापस आने में जाने की तुलना में 't' घंटे अधिक लगते हैं:

दूरी = $\frac{S_1 \times S_2}{S_1 - S_2} \times$ समय का अंतर



उदाहरण :- अमन घर से शहर की ओर 60 km/hr कीचाल से गाड़ी चलाता है और अपनी वापसी की यात्रा में, वह 30 km/hr की चाल से गाड़ी चलाता है और घर पहुंचने में भी एक घंटा अधिक लेता है।
उसने प्रत्येक यात्रा में कितनी दूरी तय की?
SSC CHSL 17/03/2023 (1st Shift)
(a) 75 km (b) 55 km (c) 60 km (d) 80 km

हल :- दूरी = $(\frac{xy}{x - y})$ t km

= $(\frac{60 \times 30}{60 - 30}) \times$ 1hr = 60km

Exam Hall approach :-
गति → 60 : 30
समय → 1 : 2 (जब दूरी समान हो तो समय गति के व्युत्क्रमानुपाती होता है)
1 इकाई = 1 घंटा
दूरी = गति × समय ⇒ 60 × 1 = 60 km

उदाहरण :- एक व्यक्ति 45 किमी/घंटा की गति से गाड़ी चलाते हुए 1 मिनट पहले कार्यालय पहुंचता है जबकि 40 किमी/घंटा की गति से गाड़ी चलाने पर वह 3 मिनट की देरी से पहुंचता है। वह कितनी दूरी (किमी में) तय कर रहा है?
RRB ALP Tier - I (21/08/2018) Afternoon
(a) 24 (b) 30 (c) 32 (d) 28

हल :- आवश्यक दूरी

= $\frac{45 \times 40}{45 - 40} \times \frac{(3 + 1)}{60} = \frac{1800}{5} \times \frac{4}{60}$ = 24 km

Exam Hall approach :-

समय का अंतर = 1 +3 = 4 मिनट= $\frac{4}{60}$ घंटा = $\frac{1}{15}$

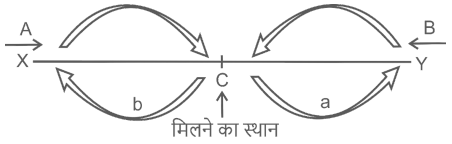
$\frac{D}{40} - \frac{D}{45} = \frac{1}{15} \Rightarrow D \times \frac{45 - 40}{40 \times 45} = \frac{1}{15}$

D = $\frac{40 \times 3}{5}$ = 24किमी

Type - 4

A और B ने क्रमशः X से Y और Y से X तक अपनी यात्रा शुरू की। बिंदु C पर एक दूसरे को पार करने के बाद, A और B ने यात्रा का शेष भाग क्रमशः 'a' घंटे और 'b' घंटे में पूरा किया। वह समय जब वे बिंदु C पर मिलते हैं

T = $\sqrt{a \times b}$



उदाहरण :- A और B ने सुबह 9 बजे क्रमशः X से Y और Y से X तक अपनी यात्रा शुरू की। बिंदु C पर एक दूसरे को पार करने के बाद, A और B ने यात्रा का शेष भाग क्रमशः '16' मिनट और '36' मिनट में पूरा किया। वह समय ज्ञात कीजिए जब वे C पर मिलते हैं?

हल :- T = $\sqrt{16 \times 36}$ = 24 मिनट
C पर मिलने का समय = 9:24 मिनट

उदाहरण :- A और B ने एक ही समय में क्रमशः बिंदु X और Y से एक दूसरे की ओर बढ़ना शुरू किया। रास्ते में मिलने के बाद, A और B को Y और X तक पहुँचने में क्रमशः 5.4 घंटे और p घंटे लगे। यदि B की गति A की गति से 50% अधिक है, तो p का मान क्या है?
RRC Group D 02/09/2022 (Afternoon)
(a) 2.7 (b) 1.8 (c) 2.4 (d) 3.6

हल :-

A : B
गति → 2 : 3

मिलने के बाद,

$\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{p}{5.4}} = \frac{2}{3} \Rightarrow p = \frac{4}{9} \times 5.4 \Rightarrow p = 2.4$ घंटा .

Type - 5

जब वास्तविक चाल दिया गया हो :-

एक व्यक्ति कोई निश्चित दूरी तय करता है अगर वह अपनी चाल S_1km/hr अधिक करता है तो वह t_1 मिनट कम समय लेता है परंतु यदि वह अपनी गति S_2km/hr कम कर दे तो वह किनती देरी से पहुँचेगा यदि उसकी वास्तविक चाल S Km/h है ।

उदाहरण :- एक व्यक्ति किसी निश्चित दूरी को एक निश्चित चाल से तय करता है। यदि वह अपनी चाल में 5 km/h की वृद्धि करता है, तो वह 12 मिनट पहले पहुँचता है यदि वह अपनी चाल मे 5 km/h की कमी करता है तो वह कितनी देरी से पहुँचेगा । यदि उसकी वास्तविक चाल 20 Km/h है ।
RRB NTPC CBT 2 Level -6(9 May 2022)
(a) 36 मिनट (b) 50 मिनट (c) 30 मिनट (d) 20 मिनट

हल :- प्रश्न के अनुसार

दूरी स्थिर है इसलिए , s ∝ $\frac{1}{t}$

@apna_pdf

चाल → 20 : 25
4 : 5
समय → 5 : 4
60मिनट 1 → 12मिनट
अब,
चाल → 20 : 15
4 : 3
समय → 3 : 4
60मिनट 80मिनट
20मिनट
वह व्यक्ति 20 मिनट की देरी से पहुँचेगा

Type - 6

8). एक व्यक्ति कोई निश्चित दूरी तय करता है अगर वह अपनी चाल S_1 km/hr अधिक करता है तो वह t_1 मिनट कम समय लेता है परंतु यदि वह अपनी गति S_2 km/hr कम कर दे तो वह t_2 मिनट अधिक समय लेता है तो वास्तविक चाल (S) ज्ञात करे ?

$$D = \frac{S \times (S + S_1)}{S_1} \times \frac{t_1}{60} = \frac{S \times (S - S_2)}{S_2} \times \frac{t_2}{60}$$

वास्तविक समय

उदाहरण :- एक व्यक्ति ने कुछ गति पर एक निश्चित दूरी तय की। अगर वह 6 किमी / घंटा तेजी से आगे बढ़ता है, तो उसे 30 मिनट कम लगते है। यदि वह 4 किमी / घंटा धीमा हो जाता है, तो उसे 30 मिनट और लगते है। उसकी मूल गति (किमी / घंटा में) क्या है?
Delhi Police Constable 02/12/2020 (Shift 2)
(a) 21 (b) 24 (c) 28 (d) 36

हल :- $D = \frac{S \times (S + S_1)}{S_1} \times \frac{t_1}{60} = \frac{S \times (S - S_2)}{S_2} \times \frac{t_2}{60}$

$\Rightarrow \frac{S \times (S + 6)}{6} \times \frac{30}{60} = \frac{S \times (S - 4)}{4} \times \frac{30}{60}$

$\Rightarrow \frac{S + 6}{6} = \frac{S - 4}{4} \Rightarrow 4S + 24 = 6S - 24 \Rightarrow 2S = 48 \Rightarrow S = 24$

Type - 7

विभिन्न माध्यमों से तय की गई दूरी:-

उदाहरण :- एक आदमी ने 6 घंटे में 47 किमी की दूरी तय की। उन्होंने $6\frac{1}{2}$ किमी/घंटा की दर से आंशिक यात्रा पैदल की और आंशिक रूप से साइकिल पर $8\frac{1}{2}$ किमी/घंटा की दर से। तो पैदल तय की गई दूरी है
SSC MTS 11/10/2021 (Afternoon)
(a) 13 किमी (b) 15 किमी (c) 12 किमी (d) 16 किमी

हल :-
माना पैदल तय की गई दूरी = x,
अत: साइकिल से तय की गई दूरी = 47 − x

$6 = \frac{x}{\frac{13}{2}} + \frac{47 - x}{\frac{17}{2}} \Rightarrow 6 = \frac{2x}{13} + \frac{2(47 - x)}{17}$

$\Rightarrow 6 = \frac{2x}{13} + \frac{94 - 2x}{17} \Rightarrow 6 = \frac{34x + 1222 - 26x}{221}$

$\Rightarrow 1326 = 8x + 1222 \Rightarrow 8x = 104 \Rightarrow x = 13$ किमी

Exam Hall approach

पैदल $\frac{13}{2}$ किमी/ घंटा
साईकल से $\frac{17}{2}$ किमी/ घंटा
$\frac{47}{6}$ किमी/घंटा
$\frac{4}{6}$ घंटा : $\frac{8}{6}$ घंटा
(1) (2)

यहाँ 3 इकाई = 6 घंटे
अतः पैदल चलने में लगा समय = 1 इकाई = 2 घंटे
इसलिए पैदल दूरी तय की गई = $2 \times \frac{13}{2}$ = 13 किमी

Type - 8

ठहराव के साथ गति :-

बिना रुके ट्रेन की औसत गति 'u' है और रुकने पर ट्रेन की औसत गति 'v' है तब,

प्रति घंटा ठहरने का समय = $\frac{\text{बिना रुके गति} - \text{रुकने के साथ गति}}{\text{बिना रुके गति}} = \frac{u - v}{u}$

उदाहरण :- ठहरने सहित ट्रेन की गति 75 किमी प्रति घंटा है और स्टॉपेज को छोड़कर ट्रेन की गति 90 किमी प्रति घंटा है। ट्रेन प्रति घंटे कितने मिनट रुकती है?
SSC CHSL 13/03/2023 (3rd Shift)
(a) 10 मिनट (b) 15 मिनट (c) 20 मिनट (d) 11 मिनट

हल :-
प्रति घंटा ठहरने का समय = $\frac{\text{बिना रुके गति} - \text{रुकने के साथ गति}}{\text{बिना रुके गति}}$

t = $\frac{90 - 75}{90}$ घंटा = $\frac{1}{6} \times 60$ = 10 मिनट

उदाहरण :- एक कार 60 किमी/घंटा की प्रारंभिक गति से चलना शुरू करती है, हर घंटे इसकी गति 10 किमी/घंटा बढ़ती है। 1210 किमी की दूरी तय करने में उसे कितने घंटे लगेंगे?
Selection Post 30/06/2023 (2nd Shift)
(a) 12 (b) 8 (c) 10 (d) 11

हल :-
पहले घंटे में तय की गई दूरी = 60 किमी.
प्रश्न के अनुसार,
तय की गई दूरी की श्रृंखला = 60, 70, 80... I
⇒ 60 + 70 + 80 +.... = 1210
A.P का योग,

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$2420 = 10n[12 + n - 1]$
$242 = n[n + 11]$
$242 = 11 \times [11 + 11] \Rightarrow n = 11$
तो, 1210 किमी की दूरी तय करने में 11 घंटे लगेंगे

उदाहरण 3 :- दो आदमी समान यात्रा क्रमशः 18 किमी/घंटा और 24 किमी/घंटा की गति से करते हैं। यदि एक आदमी दूसरे आदमी से 20 मिनट अधिक लेता है, तो कुल यात्रा की दूरी (किमी में) है:
SSC CHSL 04/08/2023 (1st Shift)
(a) 24 (b) 20 (c) 18 (d) 21

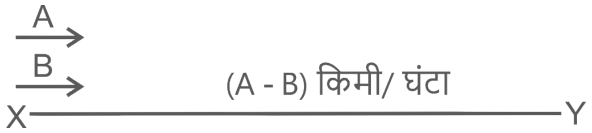
हल :-

@apna_pdf

अनुपात → पहला व्यक्ति : दूसरा व्यक्ति
गति → 18 : 24
समय → 24 : 18
समय में अंतर (6 इकाई) = 20 मिनट।
अंतिम समय (18 इकाई) = 1 घंटा
कुल यात्रा समय = 24 × 1 hour = 24 किमी

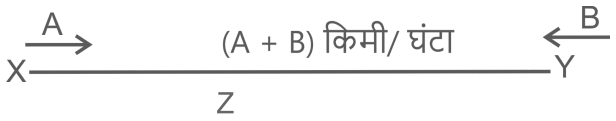
सापेक्ष गति

(i) समान दिशा :-



i.e. A और B एक ही बिंदु Y पर क्रमशः 80 km/h और 60 km/h की गति से जा रहे हैं।
B के सापेक्ष A की सापेक्ष गति = 80 - 60 = 20 km/h होगी।

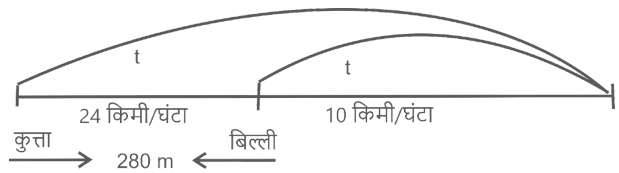
(ii) विपरीत दिशा :-



i.e. A, बिंदु Z की ओर 60 km/h की गति से चल रहा है और B बिंदु, Z से 80 km/h की गति से दूर जा रहा है।
B के सापेक्ष A की सापेक्ष गति = 60 + 80 = 140 km/h

उदाहरण :- एक पुलिसकर्मी 185 मीटर की दूरी से एक चोर को देखता है। चोर भागने लगता है और पुलिसकर्मी उसका पीछा करता है. चोर और पुलिसकर्मी क्रमशः 8 मी/सेकेंड और 9 मी/सेकेंड की गति से दौड़ते हैं। 2 मिनट बाद उनके बीच की दूरी क्या है?
SSC MTS 05/09/2023 (2nd Shift)
(a) 65 मी (b) 92 मी (c) 120 मी (d) 130 मी
हल :-
सापेक्ष गति = 9 - 8 = 1 मी/से
1 सेकंड = 1 मीटर
2 मिनट (120 सेकंड) = 120 मीटर
आवश्यक दूरी = 185 - 120 = 65 मीटर

उदाहरण :- एक कुत्ते ने 280 मीटर की दूरी पर एक बिल्ली को देखा। बिल्ली तुरंत 10 किमी/घंटा की गति से दौड़ी और कुत्ता भी उसे पकड़ने के लिए 24 किमी/घंटा की गति से दौड़ा। कुत्ते को बिल्ली को पकड़ने में कितना समय लगेगा?
RRB NTPC CBT - I 04/02/2021 (Evening)
(a) 1.3 मिनट (b) 1.2 मिनट (c) 1.4 मिनट (d) 1.5 मिनट
हल :-



दोनों स्थितियों में समय बराबर है

$$\frac{D_D}{D_c} = \frac{S_D}{S_c} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

दूरी का अंतर = 12 - 5 = 7 इकाई
7 इकाई = 280 मी
बिल्ली की दूरी = 5 इकाई

$$= \frac{280}{7} \times 5 = 200 \text{ मी} = 0.2 \text{ किमी}$$

$$\text{समय} = \frac{0.2}{10} = \frac{1}{50} \text{ घंटा} = \frac{60}{50} = 1.2 \text{ मिनट}$$

Exam Hall approach

कुत्ते और बिल्ली की सापेक्ष गति = 24 -10 =14 किमी/घंटा

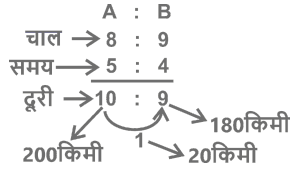
$$14 \times \frac{5}{18} = \frac{70}{18} \text{ मी/से.}$$

$$\text{समय} = \frac{280}{\frac{70}{18}} = 4 \times 18 = 72 \text{ से.} = 1.2 \text{ मिनट}$$

उदाहरण :- दो साइकिल चालक एक ही समय में 200 किमी लंबी सीधी सड़क के विपरीत छोर से चलना शुरू करते हैं। एक साइकिल चालक 20 किमी/घंटा की गति से और दूसरा 30 किमी/घंटा की गति से यात्रा करता है। उन्हें मिलने में कितना समय लगेगा?
SSC MTS 11/09/2023 (1st Shift)
(a) 5 घंटा (b) 4 घंटा (c) 5.5 घंटा (d) 4.5 घंटा
हल :-
सापेक्ष गति = 20 + 30 = 50 किमी/घंटा
तो, आवश्यक समय = $\frac{200}{50}$ = 4 घंटा

(1) जब दूरी स्थिर हो :-
(2) जब चाल स्थिर हो :-
(3) जब समय स्थिर हो :-
(4) जब कोई भी मान स्थिर ना हो :-

उदाहरण :- B की गति A की गति से 12.5% अधिक है वे क्रमश: 5 घंटे और 4 घंटे चलते है यदि A, B से 20km अधिक चलेगा तो B द्वारा तय की गई दुरी ज्ञात करे -
हल :- (यहाँ कोई भी मान स्थिर नहीं है)



उदाहरण :- एक व्यक्ति कुल यात्रा का $\frac{2}{15}$ भाग रेल द्वारा, $\frac{9}{20}$ भाग बस द्वारा तथा शेष 10 कि.मी. की दूरी पैदल तय करता है । तो कुल दूरी ज्ञात करे
हल :-

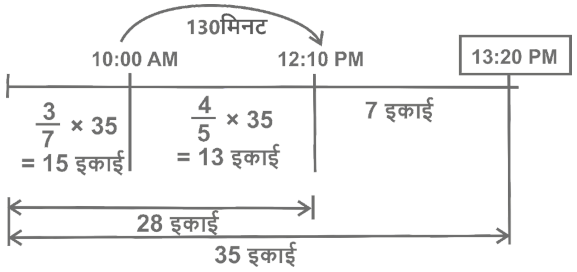
ट्रैन	बस	पैदल
$\frac{2}{15} \times 60$ = 8 इकाई	$\frac{9}{20} \times 60$ = 27 इकाई	= 10 किमी

यहाँ,
15 और 20 का LCM (कुल दूरी)= 60 इकाई
पैदल द्वारा तय की गई दूरी = कुल दूरी - (ट्रेन + बस द्वारा तय की गई दूरी)
= 60 - 35 = 25 इकाई
अब,
25 इकाई = 10 किमी
अतः , 60 इकाई = 24 किमी

@apna-pdf

उदाहरण :- एक व्यक्ति सुबह अपनी यात्रा प्रारंभ करता है । सुबह 10:00 बजे वह यात्रा का $\frac{3}{7}$ भाग तय करता है उसी दिन 12 : 10 बजे वह यात्रा का 80% तय कर लेता है तो यात्रा का प्रारम्भिक तथा अंतिम समय ज्ञात करे ।

हल :-



13 इकाई = 130 मिनट
इसलिए , 7 इकाई = 70 मिनट = 1 घंटा 10 मिनट.
तथा 15 इकाई = 150 मिनट = 2 घंटा 30 मिनट.
अतः यात्रा की प्रारम्भिक समय = 07 : 30 AM
यात्रा की अंतिम समय = 13 : 20 PM

जब कोई दो वस्तु एक निश्चित स्थान से अलग - अलग समय t_1 और t_2 तथा विभिन्न चाल क्रमश : s_1 तथा s_2 चलना प्रारंभ करती है तब निम्न मान ज्ञात करें :-

(1) दोनों वस्तु किस समय एक दूसरे से मिलेंगे
(2) दोनों वस्तु कितने दूरी मे एक दूसरे से मिलेंगे

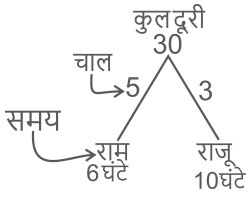
हल के लिए :-

चरण 1 :- पहली वस्तु द्वारा दिए गए समय के अंतराल मे तय की गई दूरी ज्ञात करेंगे

चरण 2 :- जब तक दूसरी वस्तु अपने निश्चित समय पर चलना प्रारंभ करेगी तब तक पहली वस्तु कुछ दूरी तय कर चुकी होगी
अतः दूसरी वस्तु इस दूरी को ही तय करेगा ।

उदाहरण :- राम बिंदु A से 8 a.m पर चलना शुरू करता है और उसी दिन बिंदु B पर 2 p.m. पर पहुँचता है। उसी दिन, राजू बिंदु B से 8 a.m पर चलना शुरू करता है और उसी दिन बिंदु A पर 6 pm पर पहुँचता है। दोनों बिंदु A और B केवल एक सीधी रेखा वाले ट्रैक द्वारा पृथक किए गए हैं। वे दोनों कितने बजे मिलते हैं?
SSC CGL 12/12/2022 (3rd Shift)
(a) 11:45 a.m. (b) 9:42 a.m
(c) 10:42 a m. (d) 12:42 p.m.
हल :- राम द्वारा लिया गया समय = 6 hrs
राजू द्वारा लिया गया समय = 10 hrs
राम और राजू की गति का अनुपात = 10 : 6
= 5 : 3 (चाल $\propto \frac{1}{\text{समय}}$)
विपरीत दिशा में यात्रा करते समय व्यक्ति की सापेक्ष गति
= 5 + 3 = 8 किमी/घंटा
दोनों व्यक्तियों द्वारा तय की गई दूरी
= 5 × 6 = 30 km
मिलने का समय = $\frac{30}{8}$ = 3 hr 45 min
इसलिए, दोनों व्यक्ति एक दूसरे से 11 : 45 am यानी (8 + 3 : 45) पर मिलेंगे।

Exam hall approach

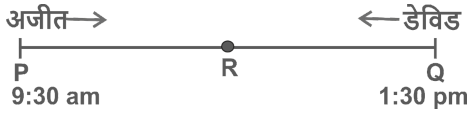


सापेक्ष गति = 5 + 3 = 8
मिलने का समय = $\frac{30}{8}$ = $\frac{15}{4}$ = $3\frac{3}{4}$ hr (3.45hr)
तो, दोनों व्यक्ति सुबह 11:45 बजे एक-दूसरे से मिलेंगे i.e.(8 + 3:45)

उदाहरण :- अनिल और तीरथ ने दो बिंदु A और B के बीच 192 किमी की दूरी तय की। अनिल ने सुबह 8:20 बजे बिंदु A से यात्रा शुरू की; 64 किमी/घंटा की गति से गाड़ी चलाई; बिंदु B पर पहुँच गया और तुरंत उसी गति से A पर लौट आया। तीरथ ने सुबह 9:50 बजे बिंदु A से यात्रा शुरू की; 96 किमी/घंटा की गति से गाड़ी चलाई; बिंदु B पर पहुँच गया और तुरंत उसी गति से A पर लौट आया। अनिल और तीरथ पहली बार एक दूसरे से किस समय मिले थे?
SSC CGL 21/07/2023 (4th shift)
(a) 11 : 38 a.m. (b) 11 : 28 a.m. (c) 11 : 43 a.m. (d) 11 : 33 a.m.
हल :-
अनिल द्वारा बिंदु B तक पहुँचने में लिया गया समय = $\frac{192}{64}$ = 3 घंटे
तो, अनिल के पॉइंट B पर पहुँचने का समय = 8 : 20 + 3
= सुबह 11:20 बजे
अब, तीरथ द्वारा प्रातः 11:20 तक तय की गई दूरी = 1.5 × 96 = 144किमी
तो, सुबह 11:20 बजे अनिल और तीरथ के बीच की दूरी
= 192 - 144 = 48 किमी
अनिल और तीरथ की सापेक्ष गति = 64 + 96 = 160 किमी/घंटा
मिलने का आवश्यक समय = $\frac{48}{160}$ × 60 = 18 मिनट
जिस समय वे मिलते हैं = 11 : 20 + 18 min = 11 : 38 a.m

उदाहरण :- दो स्थानों A और B के बीच की दूरी 140 किमी है। दो कारें x और y क्रमशः A और B से एक साथ शुरू होती हैं। यदि वे एक ही दिशा में चलते हैं, तो वे 7 घंटे बाद मिलते हैं। यदि वे एक-दूसरे की ओर बढ़ते हैं, तो वे एक घंटे बाद मिलते हैं। यदि कार y की गति कार x से अधिक है तो उसकी गति (किमी/घंटा में) क्या है?
SSC CGL Tier II (03/02/2022)
(a) 60 (b) 100 (c) 80 (d) 90
हल :- माना कार की गति
x = p किमी/घंटा
और कार की गति y = q किमी/घंटा है
प्रश्न के अनुसार,
समान दिशा की स्थिति के लिए,
q – p = $\frac{140}{7}$ = 20 .....(1)
विपरीत दिशा की स्थिति के लिए,
q + p = $\frac{140}{1}$ = 140 .....(2)
समीकरण (1) और (2) को हल करने पर, हमें मिलता है
q = 80 किमी/घंटा
तो, कार y की गति = 80 किमी/घंटा

उदाहरण :- अजीत सिंह स्थान P से स्थान Q के लिए सुबह 9:30 बजे रवाना हुए, और डेविड राज स्थान Q से स्थान P के लिए 1:30 बजे रवाना हुए। उनके बीच की दूरी 416 किमी है। यदि अजीत सिंह की गति 44 किमी/घंटा है और डेविड राज की गति 52 किमी/घंटा है, तो वे किस समय एक-दूसरे से मिलेंगे?
SSC CHSL 11/08/2021 (Afternoon)
(a) 4.30 pm (b) 5 pm (c) 6 pm (d) 4 pm
हल :-



@pna_pdf

अजीत द्वारा पहले 4 घंटों में तय की गई दूरी (9 : 30 से 1 : 30 तक)
= 44 × 4 = 176 km
शेष दूरी = 416 - 176 = 240 km
सापेक्ष गति = 44 + 52 = 96 km/h
समय = $\frac{240}{96}$ = 2.5 hours
1 : 30 + 2.5 hours = 4 pm

विविध

उदाहरण :- एक बस ,एक बस स्टेशन से प्रत्येक 30 मिनट के बाद उसी दिशा में चलना शुरू करती है। प्रत्येक बस की गति समान है। Z विपरीत दिशा में 25 किमी/घंटा की गति से बाइक चला रहा है। Z प्रत्येक बस से 20 मिनट में मिलता है। प्रत्येक बस की गति क्या है?
SSC MTS 19/07/2022 (Evening)
(a) 50 किमी/घंटा (b) 75 किमी/घंटा
(c) 30 किमी/घंटा (d) 60 किमी/घंटा
हल :- माना बस की गति x किमी
प्रश्न के अनुसार,
⇒ बस द्वारा (30 - 20) = 10 मिनट में तय की गई दूरी
= Z द्वारा 20 मिनट में तय की गई दूरी
⇒ बस द्वारा $\frac{10}{60}$ घंटे में तय की गई दूरी
= Z द्वारा $\frac{20}{60}$ घंटे में तय की गई दूरी
⇒ $\frac{10}{60}x = 25 \times \frac{20}{60} \Rightarrow x = \frac{500}{10}$ = 50 किमी/घंटा।

उदाहरण :- A समान समय अंतराल पर B का पीछा कर रहा है। A 8 बार कूदता है, जबकि B 6 बार कूदता है। लेकिन A द्वारा 7 कूदों में तय की गई दूरी ठीक वही है जो B द्वारा 5 कूदों में तय की जाती है। A और B की चालों के बीच अनुपात ज्ञात करें।
SSC CGL 08/12/2022 (1st Shift)
(a) 32 : 24 (b) 30 : 56 (c) 20 : 21 (d) 28 : 36
हल :- A द्वारा 7 छलाँगों में तय की गई दूरी, B द्वारा 5 छलाँगों में तय की गई दूरी के बराबर है।
माना कि दूरी 35 मीटर है।
प्रश्न के अनुसार ,
A द्वारा प्रति छलांग तय की गई दूरी = $\frac{35}{7}$ = 5 मीटर
B द्वारा प्रति छलांग तय की गई दूरी = $\frac{35}{5}$ = 7 मीटर
अब, A, 8 बार कूदता है : B, 6 बार कूदता है
A की चाल = 8 × 5 = 40
B की चाल = 7 × 6 = 42
आवश्यक अनुपात :- 20 : 21

उदाहरण :- एक हवाई जहाज ने निर्धारित समय से 45 मिनट बाद प्रारंभिक बिंदु से उड़ान भरी। गंतव्य प्रारंभिक बिंदु से 2100 किमी दूर था। समय पर पहुंचने के लिए पायलट को अपनी सामान्य गति से गति में 40% की वृद्धि करनी पड़ी। बढ़ी हुई गति (किमी/घंटा में) क्या थी?
SSC MTS 22/10/2021(Morning)
(a) 1870 (b) 2520 (c) 2940 (d) 1120
हल :-
40% = $\frac{2}{5}$ माना प्रारंभिक गति = 5 इकाई, फिर बढ़ी हुई गति = 7 इकाई।

	प्रारंभिक	:	नया
गति का अनुपात =	5	:	7
समय का अनुपात =	7	:	5

जाहिर है, 2 इकाई समय 45 मिनट की देरी को कवर करेगा
अत: 5 इकाई समय = $\frac{45}{2} \times 5$ मिनट
नई या बढ़ी हुई गति = $\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{नया समय}}$
⇒ $\frac{2100 \times 60 \times 2}{45 \times 5}$ = 1120

उदाहरण :- एक बंदर 12 मीटर ऊंचे फिसलन वाले खंभे पर चढ़ता है। अपने पहले मिनट में, वह 2 मीटर चढ़ता है और अगले मिनट में, वह एक मीटर नीचे फिसल जाता है। इस प्रकार, उसे खंभे के शीर्ष तक पहुँचने में कितना समय लगेगा?
UPPSC CSAT 2020
(a) 10 मिनट (b) 21 मिनट (c) 12 मिनट (d) 11 मिनट
हल :-
पहले मिनट में बंदर की चढ़ाई = 2 मीटर
दूसरे मिनट में यह फिसलता है = 1 मी
प्रत्येक दो मिनट में यह 1 मीटर चढ़ जाता है
तो, औसत गति = 1 मीटर/2 मिनट
10 मीटर के लिए = 20 मिनट
अंतिम 2 मीटर की छलांग के लिए 1 मिनट
अतः समय लगा 20 +1 = 21 मिनट
बंदर को खंभे के शीर्ष तक पहुंचने में 21 मिनट का समय लगता है।

@apna_pdf

नाव और धारा

महत्पूर्ण बातें

1). स्थिर जल में गति :- स्थिर जल में किसी वस्तु के चलने की गति

2). धारा की गति :- जल के बहाव की गति।

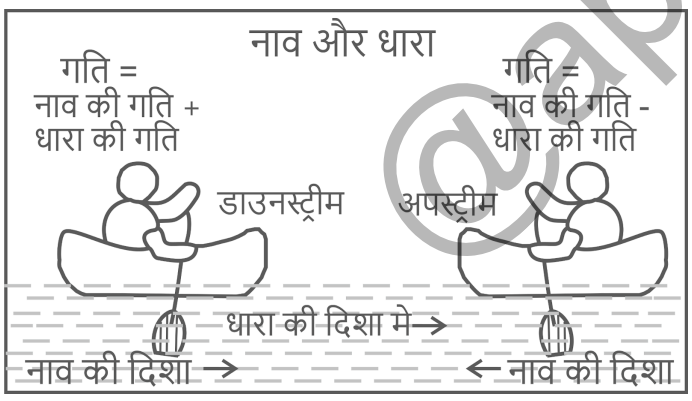
3). धारा के अनुकूल/ अनुप्रवाह गति :- बहाव के साथ चलने में किसी वस्तु की गति

धारा के अनुकूल गति = स्थिर जल में नाव की गति + धारा की गति

4). धारा के प्रतिकूल/ऊर्ध्वप्रवाह गति :- बहाव के विरुद्ध नाव के चलने की गति।

धारा के प्रतिकूल गति = स्थिर जल में नाव की गति - धारा की गति

उदाहरण:- स्थिर नदी में एक नाव की चाल 15 km/h और धारा की चाल 5 km/h है। नाव 60 किलोमीटर की दूरी धारा के साथ और उतनी ही दूरी धारा के विपरीत कितने समय (घंटे में) में तय करेगी ।
SSC CPO 25/11/2020 (Evening)
(a) 12 (b) 9 (c) 10 (d) 20
हल:- शांत जल में नाव की गति = 15 km/h
धारा की गति= 5 km/h
धारा के अनुकूल गति = 15 + 5 = 20 km/h
धारा के प्रतिकूल गति = 15 - 5 = 10 km/h
धारा के अनुकूल गति से लिया गया समय $= \frac{60}{20} = 3hr$
धारा के प्रतिकूल गति से लिया गया समय $= \frac{60}{10} = 6hr$
कुल समय = 3 + 6 = 9hr



Type - 1

(a) स्थिर जल में नाव की गति $= \frac{\text{अनुकूल गति} + \text{प्रतिकूल गति}}{2}$

उदाहरण:- धारा की दिशा में जा रही एक नौका की चाल 48 km/h है, जबकि धारा के विपरीत जाने में उसकी चाल 32 km/h है। स्थिर जल में नौका की चाल km/h में क्या है?
Selection Post 28/06/2023 (2nd Shift)
(a) 80 (b) 30 (c) 40 (d) 20
हल :- शांत पानी में नाव की गति $= \frac{48+32}{2}$ = 40 किमी/घंटा

b) धारा की गति $= \frac{\text{अनुकूल गति} - \text{प्रतिकूल गति}}{2}$

उदाहरण:- एक व्यक्ति धारा की दिशा में 49 किमी की दूरी 7 घंटे में और धारा की विपरीत दिशा में 36 किमी की दूरी 9 घंटे में तय कर सकता है। धारा की चाल क्या है?
Selection Post 02/08/2022 (2nd Shift)
(a) 1.5 km/h (b) 2 km/h (c) 2.5 km/h (d) 3 km/h
हल :- अनुकूल गति $= \frac{49}{7}$ = 7 km/hr
प्रतिकूल गति $= \frac{36}{9}$ = 4 km/hr
धारा की चाल $= \frac{\text{अनुकूल गति} - \text{प्रतिकूल गति}}{2} = \frac{7-4}{2}$ = 1.5 km/hr

Type - 2

a) यदि एक नाव को धारा के अनुकूल 'x' किमी और धारा के प्रतिकूल 'y' किमी की यात्रा करने में समान समय लगता है, तो,
$\frac{\text{नाव की गति}}{\text{धारा की गति}} = \frac{(x+y)}{(x-y)}$

उदाहरण:- एक व्यक्ति को धारा की उल्टी दिशा में जाने की अपेक्षा धारा प्रवाह की दिशा में किसी निश्चित दूरी को नाव द्वारा खेने में आधा समय लगता है। अचल पानी में चाल का,धारा की चाल से अनुपात क्या है?
UPSC CSAT (04/10/2020)
(a) 1 : 2 (b) 2 : 1 (c) 1 : 3 (d) 3 : 1
हल:- माना धारा के प्रतिकूल एक निश्चित दूरी तय करने में लगने वाला समय 2x है। अत: धारा के अनुकूल एक निश्चित दूरी तय करने में लगने वाला समय = x
$\frac{\text{अचल पानी में चाल}}{\text{धारा की चाल}} = \frac{(x+y)}{(x-y)} = \frac{2x+x}{2x-x} = \frac{3x}{x}$ = 3 : 1

b) यदि नाव द्वारा धारा के अनुकूल समान दूरी तय करने में लिया गया समय T_1 है और धारा के विपरीत दिशा में T_2 है। तो नाव की गति और धारा की गति का अनुपात:

$\frac{\text{नाव की गति}}{\text{धारा की गति}} = \frac{(T_2+T_1)}{(T_2-T_1)}$

उदाहरण:- एक नाव धारा के प्रतिकूल एक निश्चित दूरी 9 घंटे 36 मिनट में तय करती है और वही दूरी धारा के अनुकूल 6 घंटे में तय करती है। शांत जल में नाव की गति और धारा की गति का अनुपात क्या है?
SSC CGL 12/12/2022 (2nd Shift)
(a) 13 : 3 (b) 9 : 2 (c) 11 : 6 (d) 8 : 5
हल :- माना शांत जल में नाव की गति और धारा की गति क्रमशः x और y है।
धारा के अनुकूल गति (D) = (x + y) किमी/घंटा
धारा के प्रतिकूल गति (U) = (x - y) किमी/घंटा
जैसा कि हम जानते हैं, समय $\propto \frac{1}{\text{गति}}$ (जब दूरी स्थिर हो)

	D	:	U
समय →	6	:	$\frac{48}{5}$ = 5 : 8
गति →	8	:	5

$\Rightarrow \frac{\text{अनुकूल गति}}{\text{प्रतिकूल गति}} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{8}{5}$
$\frac{x}{y} = \frac{8+5}{8-5} = \frac{13}{3}$ (कंपोनेंडो और डिविडेंडो का उपयोग करके)
आवश्यक अनुपात = 13 : 3
Exam hall approach :-
T_1= 9 घंटे 36 मिनट = $\frac{48}{5}$, T_2 = 6 घंटे

@apna_pdf

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{48}{5} + 6}{\frac{48}{5} - 6} = \frac{78}{18} = \frac{13}{3}$$

Type - 3

ध्यान दें :- (निम्नलिखित सूत्रों में B = नाव की चाल तथा S = धारा की चाल)

a) यदि नाव द्वारा D km की दूरी तय करने और वापस अपनी प्रारंभिक स्थान तक पहुँचने में लिया गया कुल समय T है, तो,

दोनों स्थानों के बीच की दूरी = $\frac{T(B^2-S^2)}{2S}$

उदाहरण:- शांत जल में एक नाव की चाल 20 किमी/घंटा है, जबकि नदी की धारा 8 किमी/घंटा की चाल से बह रही है, और धारा के विपरीत दिशा में एक निश्चित दूरी को तय करने में लगा समय, धारा की दिशा में उतनी ही दूरी को तय करने में लगने वाले समय से 6 घंटे अधिक है। दूरी ज्ञात कीजिए।
SSC CPO 03/10/2023 (3rd Shift)
(a) 126 किमी (b) 125 किमी (c) 120 किमी (d) 336 किमी
हल:- माना तय की गई दूरी = x किमी
नाव की गति = 20 किमी/घंटा
जल की गति = 8 किमी/घंटा
प्रश्न के अनुसार,

$\frac{x}{12} - \frac{x}{28} = 6 \Rightarrow \frac{16x}{12 \times 28} = 6 \Rightarrow x = 126$ किमी

Exam hall approach: दोनों स्थानों के बीच की दूरी = $\frac{T(B^2-S^2)}{2S}$

$= \frac{6(20^2-8^2)}{2 \times 8} = \frac{6(400-64)}{2 \times 8} = \frac{6 \times 336}{2 \times 8} = 126$ km

b) यदि नाव द्वारा D की दूरी तय करने और अपने प्रारंभिक बिंदु पर वापस पहुंचने में लिया गया कुल समय T है

दोनों स्थानों के बीच की दूरी = $\frac{T(B^2-S^2)}{2B}$

उदाहरण:- एक व्यक्ति 6 किमी/घंटा की गति से बहने वाली नदी के प्रवाह के विपरीत 12 किमी/घंटा की गति से नदी में नौकायन कर रहा है। यदि इसे अपने प्रारंभिक बिंदु पर वापस पहुंचने में एक घंटा लगता है तो एकतरफ़ा दूरी ज्ञात करें?
AFCAT 12/02/2022 (1st Shift)
(a) 8 km (b) 9 km (c) 10 km (d) 11 km
हल:- माना शांत पानी में नाव की गति x है और धारा की गति y है
धारा के प्रतिकूल गति $(x - y) = 12$ किमी/घंटा
धारा की गति $(y) = 6$ किमी/घंटा
फिर, शांत पानी में नाव की गति $(x) = 12 + 6 = 18$ किमी/घंटा

दोनों स्थानों के बीच की दूरी = $\frac{T(B^2-S^2)}{2B} = \frac{1(18^2-6^2)}{2 \times 18}$

$= \frac{288}{2 \times 18} = 8$ km

Type - 4

औसत गति

जब एक नाव एक निश्चित दूरी तय करके प्रारंभिक बिंदु पर लौटती है तो

नाव की औसत गति = $\frac{(B^2-S^2)}{B} = \frac{(B+S)(B-S)}{B}$ km/hr

या

औसत गति = $\frac{2 \times \text{अनुकूल गति} \times \text{प्रतिकूल गति}}{\text{अनुकूल} + \text{प्रतिकूल}}$ km/hr

उदाहरण:- शांत बहती नदी में एक नाव धारा के अनुकूल एक निश्चित दूरी 12 किमी/घंटा की गति से तय करती है और फिर विपरीत दिशा में 24 किमी/घंटा की गति से समान दूरी तय करती है। कुल यात्रा के लिए औसत गति ज्ञात कीजिए।
RRB ALP Tier - II (23/01/2019) Morning
(a) 20 km/h (b) 15 km/h (c) 18 km/h (d) 16 km/h
हल:- औसत गति = $\frac{2 \times S1 \times S2}{S1 + S2}$

$\frac{2 \times 12 \times 24}{12 + 24} = \frac{2 \times 12 \times 24}{36} = 16$ a
इसलिए , यात्रा के लिए औसत गति = 16 km/h

Type - 5

समय समबंधित प्रश्न

उदाहरण:- शांत जल में एक नाव की गति 30 किमी/घंटा है और धारा की गति 7.5 किमी/घंटा है। धारा में नाव द्वारा बिंदु A से B तक जाने और फिर वापस A तक 90 किमी की कुल दूरी तय करने में लगने वाला समय घंटों में क्या है ?
SSC MTS 05/09/2023 (1st Shift)
(a) 3.2 (b) 2.8 (c) 3.4 (d) 3.0
हल :- माना कुल लिया गया समय T घंटे

$T = \frac{45}{30+7.5} + \frac{45}{30-7.5} \Rightarrow \frac{45}{37.5} + \frac{45}{22.5} = 1.2 + 2 = 3.2$ घंटे

उदाहरण:- शांत जल में नाव की गति और धारा की गति का अनुपात 8:3 है और नाव 24 मिनट में धारा के अनुकूल 22 किमी की दूरी तय कर सकती है। तो, नाव को धारा के विपरीत 50 किमी की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा?
SSC CHSL 13/03/2023 (2nd Shift)
(a) 3 hrs (b) 4 hrs (c) 2.5 hrs (d) 2 hrs
हल :- शांत जल में नाव की गति और धारा की गति = $8x$ और $3x$
क्रमशः धारा के अनुकूल 22 किमी की दूरी 24 मिनट में तय करने के लिए

नाव की गति $\Rightarrow (8x + 3x) = \frac{22}{\frac{24}{60}} = 11x =$ 55 km/h $= x =$ 5 km/h

फिर, शांत जल और धारा में नाव की गति क्रमशः 40 किमी/घंटा और 15 किमी/घंटा है
इसलिए, नाव को धारा के विपरीत 50 किमी की दूरी तय करनी होगी

$= \frac{50}{40-15} = 2$ घंटा

उदाहरण:- एक नाव धारा के अनुकूल 20 किमी की दूरी 50 मिनट में तय कर सकती है। यदि पानी की गति धारा के अनुकूल नाव की गति का 20% है, तो एक नाव को धारा के प्रतिकूल 120 किमी की यात्रा करने में कितना समय (मिनट में) लगेगा ?
SBI PO Mains (02/01/2022)
(a) 450 (b) 675 (c) 240 (d) 500 (e) इनमें से कोई नहीं
हल :- धारा के अनुकूल नाव की गति

$(x + y) = \frac{20}{50} \times 60 = 24$ किमी/घंटा

धारा की गति $(y) = 24 \times \frac{20}{100} = 4.8$ किमी/घंटा
शांत जल में नाव की गति $(x) = 24 - 4.8 = 19.2$ km/h

@apna_pdf

फिर, धारा के प्रतिकूल गति $(x - y)$ = 19.2 - 4.8 = 14.4 किमी/घंटा
अब, धारा के प्रतिकूल 120 किमी की यात्रा करने में नाव द्वारा लिया गया समय = $\frac{120}{14.4} \times 60$ = 500 मिनट

Type - 6

रिटर्न आधारित प्रश्न

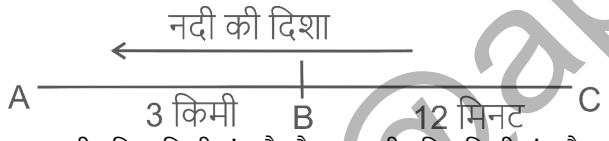
उदाहरण:- एक जहाज तट से 208 किमी दूर है। इसमें एक छेद हो जाता है जिससे 5 मिनट में 6 लीटर पानी भर जाता है। जहाज में निकासी पाइप भी है जो प्रति घंटे 60 लीटर पानी निकालता है। तो जहाज की गति ज्ञात कीजिए। यदि 7 किमी/घंटा की गति से जहाज की ओर आ रहा एक बचाव जहाज डूबने से पहले उस तक पहुंच सकता है? जहाज डुबाने के लिए 156 लीटर पानी काफी है.

हल :- जहाज की गति = x किमी/घंटा
5 मिनट = 6 लीटर⇒ 60 मिनट = 72 लीटर
1 घंटे में जहाज से पानी निकाला = 60 लीटर
फिर, 1 घंटे में भरा पानी = 12 लीटर
12 लीटर = 1 घंटा ⇒156 लीटर = 13 घंटा
दोनों जहाज़ों के बीच की दूरी = 208 किमी,
बचाव जहाज की गति = 7 किमी/घंटा
दोनों जहाज़ों की सापेक्ष गति =$(x + 7)$ किमी/घंटा

$(x + 7) = \frac{208}{13} \Rightarrow (x + 7) = 16 \Rightarrow x = 9$ किमी/घंटा

उदाहरण:- साक्षी अपनी नाव में जा रही थी, अचानक उसकी टोपी उड़ गई और धारा के साथ बहने लगी। नाव 12 मिनट तक धारा के विपरीत चलती रही। जब साक्षी को एहसास हुआ कि उसकी टोपी उड़ गई है, तो उसने नाव घुमाई और टोपी की ओर बढ़ने लगी। उसने टोपी वहीं पकड़ ली, जहां से उसने चलना शुरू किया था. यदि उसकी टोपी प्रारंभिक बिंदु से 3 किमी की दूरी पर उड़ी, तो धारा की गति ज्ञात कीजिए।

हल :-

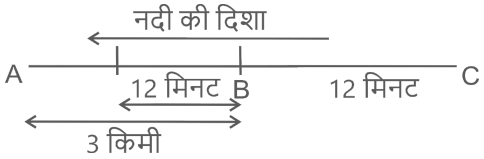


माना नाव की गति x किमी/घंटा है और धारा की गति y किमी/घंटा है
माना नाव को C से A तक लौटने का समय 't' मिनट है
टोपी B से A की ओर वापस तैरने लगी। नाव के वापस लौटने से 12 मिनट पहले,
इसलिए टोपी की वापसी में (12 मिनट + t) का समय लगा।
दूरी BC = धारा के प्रतिकूल नाव द्वारा लिया गया समय x धारा के प्रतिकूल नाव की गति BC = 12$(x - y)$
दूरी AC = t$(x + y)$
दूरी AB = (t + 12)y
दूरी AB + BC = दूरी AC
(t + 12)y + 12$(x - y)$ = t$(x + y)$ समय, t = 12
जैसे ही टोपी की वापसी में (12 मिनट + t) का लगा समय

कुल समय 24 मिनट = $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ घंटे

गति = $\frac{3}{(\frac{2}{5})}$ = 7.5 किमी/घंटा

Exam hall approach:



प्रारंभिक बिंदु से उस बिंदु तक की दूरी जहां टोपी गिरी = 3 किमी.

समय दोगुना होगा = 2 × 12 = 24 मिनट या $\frac{2}{5}$ घंटा.

गति $\frac{3}{(\frac{2}{5})}$ = 7.5 किमी/घंटा

@apna_pdf

रेलगाड़ी (ट्रेन)

दूरी = गति × समय

हमें ये सूत्र याद रखना चाहिए। यदि दो मान दिए गए हो तो हम तीसरा मान निकाल सकते हैं।

इकाई रूपांतरण

किमी/घंटा से मीटर/सेकंड	किमी / घंटा $\xrightarrow{\times \frac{5}{18}}$ मीटर/ सेकंड **i.e.** 90किमी/घंटा = $90 \times \frac{5}{18}$ मीटर/सेकंड = 25 मीटर/सेकंड
मीटर/सेकंड से किमी/घंटा	मीटर/ सेकंड $\xrightarrow{\times \frac{18}{5}}$ किमी / घंटा **i.e.** 25 मीटर/सेकंड = $25 \times \frac{18}{5}$ किमी/घंटा = 90किमी/घंटा

नोट :- 1 घंटे = 60 मिनट = 3600 सेकंड
1 यार्ड = 3 फीट
1 मील = 1. 609 किलोमीटर

Type - 1

जब ट्रेन एक व्यक्ति/पोल/प्लेटफॉर्म/सुरंग/ट्रेन को पार करती है।

(a) रेलगाड़ी किसी व्यक्ति या खंभे को पार कर जाती है :-
ऐसी स्थिति में व्यक्ति या खंभे की लंबाई नगण्य मानी जाती है। व्यक्ति को पार करने के लिए ट्रेन को अपनी लंबाई के बराबर दूरी तय करनी पड़ती है।

उदाहरण :- एक प्लेटफार्म पर खड़े एक व्यक्ति को पार करने के लिए 54 km/h की गति से चलने वाली 450 m लंबी ट्रेन द्वारा लिया गया समय क्या है ?
NTPC CBT II (09/05/2022) 1st Shift
(a) 25 सेकंड (b) 32 सेकंड (c) 28 सेकंड (d) 30 सेकंड

हल :- गति = 54 km/h = $54 \times \frac{5}{18}$ m/s = 15 m/s.

आवश्यक समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{450}{15}$ = 30 सेकंड

(b) रेलगाड़ी किसी प्लेटफार्म या सुरंग को पार कर रही है :-
ऐसी स्थिति में ट्रेन द्वारा प्लेटफार्म पार करने में तय की गई दूरी ट्रेन और प्लेटफार्म की लंबाई के योग के बराबर होगी।

उदाहरण :- एक ट्रेन की लंबाई 330 मीटर है और यह 72 किमी/घंटा की गति से चल रही है। यह 710 मीटर लंबे प्लेटफॉर्म को पार करने में कितना समय लेगी ?
SSC CGL Tier II (08/08/2022)
(a) 52 सेकंड (b) 56 सेकंड (c) 72 सेकंड (d) 64 सेकंड

हल :- यहाँ, गति = 72 किमी/घंटा = $72 \times \frac{5}{18}$ = 20 m/s
दूरी = ट्रेन की लंबाई + प्लेटफार्म की लंबाई = 330 + 710= 1040 m
आवश्यक समय = $\frac{1040}{20} = \frac{1040}{20}$ = 52 सेकंड

Type - 2

एक ही दिशा में सापेक्ष गति

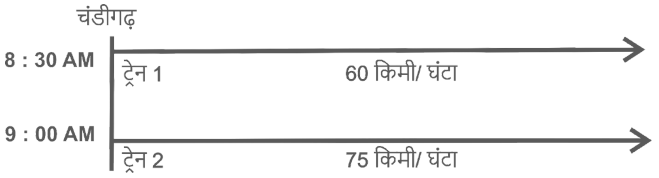
(a) ट्रेन उसी दिशा में चल रही दूसरी ट्रेन को पार कर रही है :-
ऐसी स्थिति में दूसरी ट्रेन को पार करने के लिए ट्रेन द्वारा तय की गई दूरी दोनों ट्रेनों की लंबाई के योग के बराबर होगी। समय की गणना करने के लिए हमें एक ट्रेन की दूसरी ट्रेन की सापेक्ष गति पर विचार करना होगा।

सापेक्ष गति = $\frac{\text{सापेक्ष दूरी}}{\text{सापेक्ष समय}}$

उदाहरण :- 80 km/h की चाल से चल रही एक रेलगाड़ी, समान दिशा में 26 km/h की चाल से चल रही एक दूसरी रेलगाड़ी को 30 सेकंड में पार करती है। दोनों रेलगाड़ियों की संयुक्त लंबाई कितनी है ?
SSC CHSL 08/08/2023 (4th Shift)
(a) 400 m (b) 450 m (c) 550 m (d) 350 m
हल :- सापेक्ष गति = 80 – 26 = 54 किमी/घंटा
प्रश्न के अनुसार,
$54 \times \frac{5}{18} = \frac{L1 + L2}{30}$
L1 + L2 = 15 × 30 = 450 मीटर

(b) जब दो रेलगाड़ियाँ अलग-अलग समय पर अपनी यात्रा शुरू करती हैं:-

उदाहरण :- दो ट्रेनें सुबह 8:30 बजे और 9:00 बजे चंडीगढ़ से अपनी यात्रा शुरू करती हैं। उनकी गति क्रमशः 60 किमी/घंटा और 75 किमी/घंटा है। दोनों ट्रेनें एक-दूसरे से किस समय और चंडीगढ़ से कितनी दूरी पर मिलेंगी ?
हल :-



अब , समय = $\frac{1}{2}$ घंटा , चाल = 60 Km/h
अतः , पहली रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{1}{2} \times 60$ = 30 km
मिलने का समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{30}{75 - 60}$ = 2 घंटा
दोनों रेलगाड़ी एक दूसरे से 11:00 am (9 :00 + 2 घंटे) मे मिलेंगे।
कुल समय = 2.5 घंटे
दूरी = 2.5 ×60 = 150 किमी

(c) जब एक रेलगाड़ी एक दौड़ते हुए व्यक्ति/आदमी को पार करती हैं :-

उदाहरण :- 228 मीटर लंबी एक ट्रेन 125 किमी/घंटा की गति से चल रही है। यह ट्रेन जिस दिशा में जा रही है, उसी दिशा में 17 किमी/घंटा की गति से दौड़ रहे एक व्यक्ति को कितने समय में (सेकंड में) पार कर लेगी?
SSC MTS 14/09/2023 (3rd Shift)
(a) 9.2 (b) 7.6 (c) 6.2 (d) 8.5

हल :- सापेक्ष गति = (125 – 17) = $108 \times \frac{5}{18}$ = 30 m/s

@apna_pdf

आवश्यक समय = $\frac{228}{30}$ = 7.6सेकंड

(d) जब ट्रेन समान दिशा में चल रही दूसरी ट्रेन में बैठे एक आदमी को पार करती है :-

ऐसी स्थिति में, ट्रेन की लंबाई ट्रेन द्वारा आदमी को पार करने में तय की गई दूरी के बराबर होगी।

दूसरी ट्रेन की लंबाई पर विचार नहीं किया जाएगा :-

उदाहरण :- दो रेलगाड़ियाँ 36 कि.मी./घंटा तथा 48 कि. मी./घंटा की चाल से समान दिशा में चल रही है। तीव्र चाल वाली रेलगाड़ी द्वारा धीमी चाल वाली रेलगाड़ी में बैठे एक पुरुष को पार करने में लिया गया समय 33 सेकण्ड है। तीव्र चाल वाली रेलगाड़ी की लम्बाई क्या होगी?

SSC CGL 07/12/2022 (4th Shift)

(a) 770 मीटर (b) 90 मीटर (c) 110 मीटर (d) 180 मीटर

हल :- माना , रेलगाड़ी की लम्बाई = x मीटर

$\frac{x}{48-36} \times \frac{18}{5} = 33 \Rightarrow \frac{3x}{10} = 33 \Rightarrow x = 110$

अतः तीव्र चाल वाली रेलगाड़ी की लम्बाई = 110 मीटर

विपरीत दिशा में सापेक्ष गति

(a) ट्रेन विपरीत दिशा में चल रही दूसरी ट्रेन को पार कर रही है :-

ऐसी स्थिति में दूसरी ट्रेन को पार करने के लिए ट्रेन द्वारा तय की गई दूरी दोनों ट्रेनों की लंबाई के योग के बराबर होगी।

उदाहरण :- क्रमशः 125 m और 99 m लंबाई वाली दो रेलगाड़ियाँ क्रमशः 40 km/h और 32 km/h की चाल से विपरीत दिशाओं में चल रही हैं। मिलने के क्षण से कितने समय बाद वे एक-दूसरे से पूरी तरह पार कर देंगी?

SSC CHSL 17/08/2023 (1st Shift)

(a) 10.2 सेकंड (b) 11.2 सेकंड (c) 9.2 सेकंड (d) 12.2 सेकंड

हल :- यहां, दूसरी ट्रेन के संबंध में पहली ट्रेन की सापेक्ष गति

= (40 + 32) किमी/घंटा = 72 × $\frac{5}{18}$ = 20 मीटर/सेकंड

दूरी = पहली ट्रेन की लंबाई+ दूसरी ट्रेन की लंबाई

= 125 + 99 = 224 मीटर

समय = $\frac{224}{20}$ = 11.2 सेकंड

(b) जब दो ट्रेनें दो अलग-अलग स्थानों से एक-दूसरे की ओर यात्रा शुरू करती हैं :-

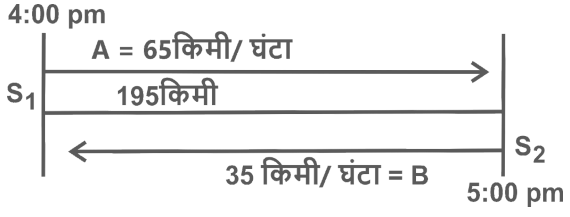
मिलने का समय ज्ञात करे :-

उदाहरण :- S_1 और S_2 दो स्टेशन हैं जो 195 किमी दूर हैं। एक ट्रेन शाम 4:00 बजे S_1 से शुरू होती है और 65 किमी/घंटा की गति से S_2 की ओर चलती है। एक अन्य ट्रेन B शाम 5:00 बजे S_2 से शुरू होती है और 35 किमी/घंटा की गति से S_1 की ओर चलती है। दोनों ट्रेनें किस समय मिलेंगी?

SSC CGL 21/07/2023 (3rd shift)

(a) 6 : 06 p.m (b) 6 : 30 p.m (c) 6 : 15 p.m (d) 6 :18 p.m

हल :-



ट्रेन A द्वारा 1 घंटे में तय की गई दूरी = 65 × 1= 65 किमी

शेष दूरी = 195 - 65 = 130 किमी

उनकी सापेक्ष गति = 65 + 35 = 100 किमी/घंटा.

मिलने में समय लगा = $\frac{130}{100}$ = 1.3 घंटे or 1 घंटे . 18 मिनट

जिस समय वे मिलते हैं = शाम 5:00 बजे + 1 घंटा 18 मिनट.

= 6 :18 अपराह्न

दूरी ज्ञात करें :-

उदाहरण :- दो स्टेशनों A और B के बीच की दूरी 200 किमी है। एक ट्रेन A से B तक 75 किमी/घंटा की गति से चलती है, जबकि दूसरी ट्रेन B से A तक 85 किमी/घंटा की गति से चलती है। मिलने से 3 मिनट पहले दोनों ट्रेनों के बीच की दूरी (किमी में) क्या होगी?

SSC CGL 21/04/2022(Morning)

(a) 5 (b) 8 (c) 10 (d) 6

हल :- दो ट्रेनों की सापेक्ष गति उनकी गति का योग है क्योंकि वे एक दूसरे की ओर दौड़ रही हैं।

सापेक्ष गति = 75 किमी/घंटा + 85 किमी/घंटा= 160 किमी/घंटा ,

समय = 3 मिनट = $\frac{3}{60}$ घंटे

दूरी = गति × समय = 160 × $\frac{3}{60}$ = 8 किमी

(c) जब ट्रेन विपरीत दिशा में चल रही दूसरी ट्रेन में बैठे एक व्यक्ति को पार करती है :-

ऐसी स्थिति में व्यक्ति को पार करने में ट्रेन द्वारा तय की गई दूरी ट्रेन की लंबाई के बराबर होगी।

दूसरी ट्रेन की लंबाई पर विचार नहीं किया जाएगा :-

उदाहरण :- रेणु एक ट्रेन (A) के भीतर बैठी हुई थी, जो 50 किमी/घंटा की चाल से चल रही थी। A की लंबाई से तिगुनी लंबाई की एक अन्य ट्रेन B ने उसे विपरीत दिशा से 15 सेकंड में पार किया। यदि ट्रेन B की चाल 58 किमी/घंटा थी, तो ट्रेन A की लंबाई (मीटर में) ज्ञात करें।

SSC CGL Tier II (12/09/2019)

(a) 210 (b) 180 (c) 160 (d) 150

हल :- माना ट्रेन A की लंबाई = L

ट्रेन B की लंबाई = 3L

ट्रेनों की सापेक्ष गति = (50 + 58) किमी/घंटा

प्रश्न के अनुसार

$\frac{3L}{(50+58) \times \frac{5}{18}} = 15 \Rightarrow 3L = 15 \times 30 \Rightarrow L = 150$ मीटर

विविध प्रश्न

उदाहरण :- बिना किसी वैगन के एक लोकोमोटिव इंजन 50 किमी प्रति घंटे की गति से चल सकता है और इसकी गति एक मात्रा से कम हो जाती है जो संलग्न वैगनों की संख्या के वर्गमूल के रूप में भिन्न होती है। यदि 25 वैगनों के साथ इसकी गति 35 किमी प्रति घंटा है,यदि गति 11 किमी प्रति घंटे से कम न हो तो जोड़े जा सकने वाले वैगनों की अधिकतम संख्या क्या है?

RRB NTPC CBT - I 07/04/2021 (Morning)

(a) 169 (b) 144 (c) 196 (d) 225

हल :- जब कोई वैगन जुड़ा न हो तो इंजन की गति 50 किमी/घंटा होती है दर कम हो जाती है (50 - S) α $\sqrt{N}$

N इंजन से जुड़े वैगन की संख्या है और 50 - S = K $\sqrt{N}$

@apna_pdf

जब N = 25 , S = 35 km/h $\Rightarrow$ 50 - 35 = K $\sqrt{25} \Rightarrow$ K = $\frac{15}{5}$ = 3

यदि गति S = 11 km/h

तब , (50 - 11) = 3 × $\sqrt{N}$

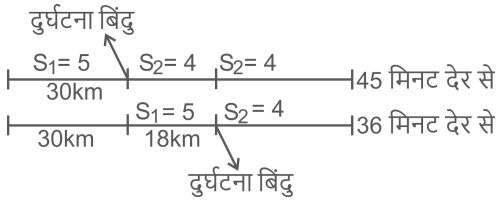
प्रश्न के अनुसार

$\Rightarrow$ (50 - 11) = 3 × $\sqrt{N}$ $\Rightarrow$ 39 = 3 × $\sqrt{N}$

$\Rightarrow$ 13 = $\sqrt{N}$ $\Rightarrow$ N = 13^2 = 169

उदाहरण :- 30 किमी की यात्रा के बाद एक दुर्घटना के कारण एक ट्रेन सेवा बाधित हो गई। गति को मूल गति से चार-पाँचवीं तक कम कर दिया गया। इसके कारण इसमें 45 मिनट की देरी हुई। यदि दुर्घटना 18 किमी दूर हुई होती तो यह 36 मिनट देरी से चल रही होती। ट्रेन की मूल गति क्या थी?
RRB NTPC CBT - I 02/02/2021 (Evening)
(a) 30 km/h (b) 60km/h (c) 50km/h (d) 40km/h

हल :-



कुल समय बचाया गया = 45 - 36 = 9 मिनट

18 किमी की दूरी के लिए

दोनों स्थितियों में दूरी बराबर = 18 किमी

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{5}$

समय का अंतर = 1 इकाई = 9 मिनट

T_2 = 4 इकाई = 36 मिनट= $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ घंटे

गति = $\frac{D}{T} = \frac{18}{3} \times 5 = 30$ किमी/घंटा

उदाहरण :- 8 मिनट के अंतराल पर रेलवे स्टेशन से दो बंदूकें दागी जाती हैं। स्टेशन पहुँच रही ट्रेन में बैठे एक पुलिस अधिकारी ने ध्यान दिया कि दो बंदूकों की आवाज के बीच 7 मिनट का अन्तराल है। यदि ध्वनि का वेग 350 मी/सेकंड है। ट्रेन स्टेशन पर किस गति (किमी/घंटा) से आ रही थी?
(a)162 (b) 90 (c)120 (d)180

हल :- समय का अन्तराल = 8 मिनट - 7 मिनट = 1मिनट (60 सेकंड)

जैसा कि हम जानते हैं,

ट्रेन द्वारा 7 मिनट में तय की गई दूरी = 60 सेकंड में ध्वनि द्वारा तय की गई दूरी = 350 × 60

7 मिनट = (7 × 60) सेकंड

ट्रेन की गति = $\frac{350 \times 60}{7 \times 60} \times \frac{18}{5}$ = 180 किमी/घंटा

@pna_pdf

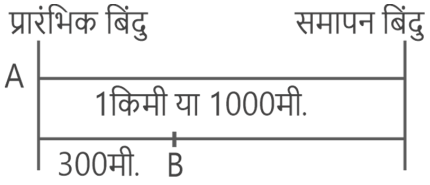
रेखीय/वृत्ताकार दौड़

दौड़ (रेस) में प्रयुक्त महत्वपूर्ण शब्द :-

रेखीय दौड़ (Linear race) :- यह एक सीधा रास्ता है जिससे आरंभ और समापन बिंदु एक दूसरे से मेल नहीं खाते हैं।
वृत्ताकार दौड़ (Circular race) :- यह एक वृत्ताकार पथ है जिससे प्रारंभ और समापन बिंदु एक दूसरे के साथ मेल खाते हैं।
डेड हीट या डेड लॉक (Dead Heat or Dead Lock) :- डेड हीट की स्थिति तब होती है जब सभी प्रतिभागी एक ही समय में समापन बिंदु पर पहुंच जाते हैं।
हेड-स्टार्ट (Head-start) :- जब एक दौड़ने वाला (रेसर), शुरुआती बिंदु से आगे स्टार्ट करता है तो इसे हेड स्टार्ट कहा जाता है।
ट्रेल :- जब एक रेसर शुरुआती बिंदु के पीछे दौड़ शुरू करता है या दूसरे रेसर के पीछे दौड़ शुरू करता है।

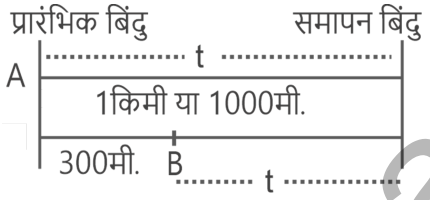
• रैखिक दौड़ की कुछ स्थितियाँ :-

1 km की दौड़ में, A, B को 300 मीटर की शुरुआत देता है



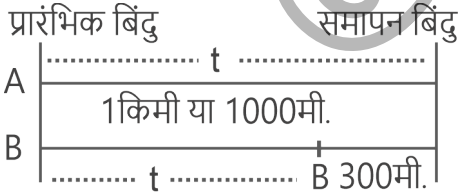
A प्रारंभिक बिंदु से दौड़ शुरू करता है, जबकि B, A से 300 मीटर आगे से शुरू करता है।
इस स्थिति में , 1000 मीटर की दौड़ को पूरा करने के लिए, A को 1000 मीटर की दूरी तय करनी होगी जबकि B को केवल (1000 - 300) = 700 मीटर की दूरी तय करनी होगी।

• जब वही दौड़ एक डेड हीट में समाप्त हो जाती है। :-



डेड हीट स्थिति तब होती है , जब सभी प्रतिभागी एक ही समय में समापन बिंदु पर पहुंच जाते हैं।

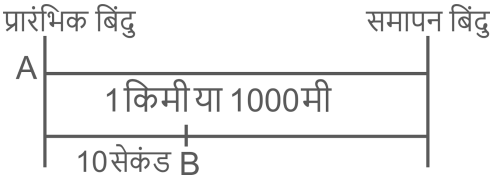
• 1 km की दौड़ में A, B से 300 मीटर से जीत जाता है :-



उसी समय पर , A समापन बिंदु पर पहुंच गया, जबकि B, A से 300 मीटर पीछे है।
इस स्थिति में 1000 मीटर की दौड़ को पूरा करने के लिए, A ने 1000 मीटर की दूरी तय की है जबकि B ने केवल (1000 - 300) = 700 मीटर की दूरी तय की है।

उदाहरण :- 1610 मीटर की दौड़ में, अमरजीत 91 सेकंड में अंतिम बिंदु पर पहुंचता है और दिनेश 115 सेकंड में अंतिम बिंदु पर पहुंचता है। अमरजीत ने दिनेश को कितनी दूरी से हराया?
Selection Post 30/06/2023 (3rd Shift)
(a) 326 m (b) 340 m (c) 336 m (d) 330 m
हल :- दिनेश द्वारा तय की गई दूरी = 1610 मीटर
दिनेश द्वारा लिया गया समय = 115 सेकंड
अमरजीत को दौड़ पूरी करने में लगा समय = 91 सेकंड।
दिनेश द्वारा 91 सेकंड में तय की गई दूरी =
$\frac{1610}{115} \times 91 = 14 \times 91 = 1274$ मी.
तो, अमरजीत ने दिनेश को हराया (1610 - 1274) = 336 मी

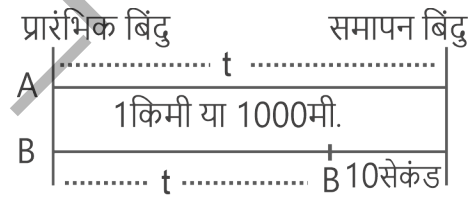
• 1 km की दौड़ में, A, B को 10 सेकंड की शुरुआत देता है:-



A, B के आरंभिक बिंदु से आरंभ करने के 10 सेकंड बाद आरंभ करेगा । A और B दोनों एक ही समय में अंतिम बिंदु पर पहुंचेंगे।

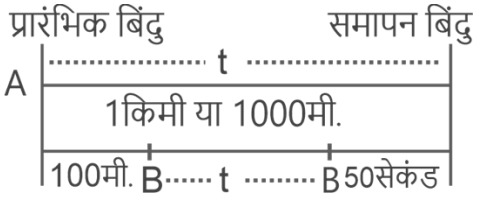
उदाहरण :- 1500 मीटर की दौड़ में A, B को 10 सेकंड की बढ़त देता है और दोनों एक ही समय में दौड़ पूरी करते हैं। यदि B की गति 6 मीटर/सेकेंड है तो A को दौड़ पूरी करने में कितना समय (मिनटों में) लगेगा?
SSC CPO 11/11/2022 (Afternoon)
(a) 3 (b) 4 (c) 8 (d) 5
हल :- B की गति = 6 मी/से
दौड़ पूरी करने में B द्वारा लिया गया समय = $\frac{1500}{6}$ = 250 सेकंड
अतः, A द्वारा दौड़ पूरी करने में लिया गया समय
= 250 - 10 = 240 सेकंड या 4 मिनट

• 1 km की दौड़ में, A, B से 10 सेकंड से जीत जाता है :-



यहां, दौड़ पूरी करने के लिए B का आवश्यक समय (t +10) सेकंड है।

• 1 km की दौड़ में, A, B को 100 मीटर की शुरुआत देता है और फिर भी B से 50 सेकंड से जीत जाता है :-



उदाहरण :- 1000 मीटर की एक रैखिक दौड़ में, A, B को 50 मीटर या 5 सेकंड से हरा देता है। A और B की गति (मीटर/सेकंड में) के बीच क्या अंतर है?
SSC CGL 06/12/2022 (3rd Shift)
(a) $1\frac{10}{19}$ (b) $\frac{10}{19}$ (c) $\frac{9}{19}$ (d) $\frac{9}{10}$
हल :- A और B द्वारा तय की गई दूरी का अनुपात क्रमशः =1000 : 950
B की गति = $\frac{50}{5}$ = 10 मी/से
B द्वारा 950 मीटर तय करने में लिया गया समय A द्वारा 1000 मीटर तय करने में लिए गए समय के बराबर है।
समय (B) = $\frac{950}{10}$ = 95 सेकंड।
अब, A की गति = $\frac{1000}{95} = \frac{200}{19}$ मी/से
आवश्यक अंतर = $\frac{200}{19} - 10 = \frac{10}{19}$ मी/से

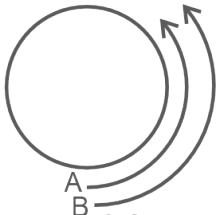
@apna_pdf

उदाहरण :- A और B 100 मीटर की दौड़ में भाग लेते हैं। A 5 किमी/घंटा की गति से दौड़ता है। A, B को 8 मीटर की शुरुआत देता है और फिर भी उसे 8 सेकंड से हरा देता है। B की गति ज्ञात कीजिए।
RRB JE 02/06/2019 (Afternoon)
(a) 5.15 km/hr (b) 4.14 km/hr (c) 4.20 km/hr (d) 4.25 km/hr
हल :- प्रश्न के अनुसार,
A द्वारा 100 मीटर दौड़ पूरी करने में लिया गया समय
$= \frac{100}{5 \times \frac{5}{18}}$ = 72 सेकंड
B द्वारा तय की गई दूरी = 100 - 8 = 92 मीटर।
B द्वारा लिया गया समय = 72 + 8 = 80 सेकंड।
अतः B की गति = $\frac{92}{80} \times \frac{18}{5}$ = 4.14 किमी/घंटा

Circular race concepts / वृत्ताकार दौड़ अवधारणाएँ

• मान लीजिए कि A और B दो धावक हैं जो L लंबाई के एक वृत्ताकार पथ पर क्रमशः S_1 और S_2 गति से दौड़ रहे हैं। ($S_1 > S_2$)

स्थिति 1 :- जब दोनों धावक एक ही दिशा में दौड़ रहे हों



एक ही दिशा

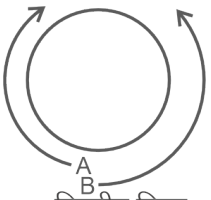
(I). प्रारंभिक बिंदु पर पहली बार मिलने के लिए दोनों धावक द्वारा लिया गया समय = $(\frac{L}{S_1}, \frac{L}{S_2})$ का LCM

उदाहरण :- ज़ीनत और नसरीन 1.2 km की एक वृत्ताकार दौड़ में भाग लेती है। वे एक ही बिंदु से एक ही समय पर क्रमशः 18 km/h और 27 km/h की चाल से दौड़ शुरू करती हैं। यदि वे एक ही दिशा में दौड़ रही है, तो वे कितने समय (मिनटों में) के बाद पहली बार प्रारंभिक बिंदु पर मिलेंगी ?
SSC CHSL 02/08/2023 (1st Shift)
(a) 9 (b) 7 (c) 10 (d) 8
हल :- ज़ीनत द्वारा वृत्ताकार दौड़ पूरी करने में लिया गया समय
$= \frac{1.2}{18} \times 60$ = 4 मिनट
नसरीन को वृत्ताकार दौड़ पूरी करने में लगा समय
$= \frac{1.2}{27} \times 60 = \frac{8}{3}$ मिनट
अतः, आवश्यक समय = LCM$(4, \frac{8}{3})$ = 8 मिनट

(II). ट्रैक पर कहीं भी पहली बार मिलने में लगा समय = $(\frac{L}{S_1 - S_2})$

उदाहरण :- दो व्यक्ति A और B, 27 kmph और 36 kmph की क्रमिक चाल के साथ 1200 m लंबे एक वृत्ताकार ट्रैक के चारों ओर दौड़ रहे हैं। वे एक ही समय पर एक ही बिंदु से शुरू करते हैं और एक ही दिशा में दौड़ रहे हैं। वे ट्रैक पर पहली बार (सेकंड में) कब मिलेंगे?
SSC CHSL 14/08/2023 (2nd Shift)
(a) 420 (b) 240 (c) 480 (d) 360
हल :- सापेक्ष गति = (36 – 27) km/h = 9 km/h
समय जब वे ट्रैक पर पहली बार मिलेंगे = $\frac{1200}{9 \times \frac{5}{18}}$ = 480 सेकंड

स्थिति 2 :- जब दोनों धावक विपरीत दिशा में दौड़ रहे हों



विपरीत दिशा

(I). प्रारंभिक बिंदु पर पहली बार मिलने में लगा समय = $(\frac{L}{S_1}, \frac{L}{S_2})$ का LCM

उदाहरण :- 900 मीटर लंबी एक गोलाकार दौड़ में, A और B एक ही समय पर एक ही बिंदु से 27 किमी/घंटा और 36 किमी/घंटा की गति से दौड़ शुरू करते हैं। विपरीत दिशा में चलते हुए वे प्रारंभिक बिंदु पर पहली बार कब मिलेंगे ?
हल :- प्रारंभ बिंदु तक पहुंचने में A द्वारा लिया गया समय
$= \frac{900}{27 \times 5} \times 18$ = 120 सेकंड
प्रारंभ बिंदु तक पहुँचने में B द्वारा लिया गया समय
$= \frac{900}{36 \times 5} \times 18$ = 90 सेकंड
90 और 120 का L.C.M. = 30 × 3 × 4 = 360 सेकंड
आवश्यक समय = $\frac{360}{60}$ = 6 मिनट

(II). ट्रैक पर कहीं भी पहली बार मिलने में लगा समय = $(\frac{L}{S_1 + S_2})$

उदाहरण :- 2500 मीटर की एक वृत्ताकार दौड़ में, एक पुरुष और एक महिला क्रमशः 37 km/h और 35 km/h की गति से विपरीत दिशाओं की ओर एक बिंदु से दौड़ना शुरू करते हैं। दौड़ शुरू होने के कितने समय बाद वे पहली बार मिलेंगे?
SSC CHSL 02/06/2022(Morning)
(a) 2 मिनट 40 सेकंड (b) 2 मिनट 30 सेकंड
(c) 2 मिनट 5 सेकंड (d) 2 मिनट 20 सेकंड
हल :- सापेक्ष गति जब दोनों विपरीत दिशाओं में हों = 37 + 35
= 72 km/hr
कुल दूरी = $\frac{2500}{1000}$ = 2.5 km
पहली बार जब वो मिलेंगे = $\frac{2.5}{72} = \frac{5}{144}$ hr = $\frac{5}{144} \times 60$
= 2 मिनट 5 सेकंड

उदाहरण :- A और B 1400 मीटर लंबे वृत्ताकार ट्रैक पर दौड़ रहे हैं। A की गति 33 मीटर/सेकंड है और B की गति 47 मीटर/सेकंड है। वे एक ही समय पर एक ही बिंदु से विपरीत दिशा में प्रारंभ करते हैं। वे कितने समय बाद दूसरी बार मिलेंगे?
SSC CHSL 17/08/2023 (2nd Shift)
(a) 33 सेकंड (b) 38 सेकंड (c) 35 सेकं (d) 32 सेकंड
हल :- वृत्ताकार ट्रैक की कुल लंबाई = 1400 मीटर
A और B की सापेक्ष गति = 33 + 47 = 80 मी/से
पहली बार मिलने में लगा समय = $\frac{1400}{80}$ = 352 सेकंड
अतः, दूसरी बार मिलने में समय लगा = $\frac{35}{2} \times 2$ = 35 सेकंड

मिलन बिंदुओं की संख्या

• सभी दूर स्थित मिलन बिंदु एक वृत्ताकार पथ में समान दूरी पर होते हैं और यही समय के लिए भी लागू होती है।
• यह ट्रैक की लंबाई पर निर्भर नहीं करता है।
• विभिन्न मिलन बिंदुओं की संख्या प्राप्त करने के लिए, दोनों गतियों का सबसे सरल अनुपात अर्थात x : y ज्ञात कीजिए।

@anna-pdf

स्थिति 1 :- जब दो धावक एक ही दिशा में दौड़ रहे हों तो मिलन बिंदुओं की संख्या = x - y

स्थिति 2 :- जब दो धावक विपरीत दिशा में दौड़ रहे हों तो मिलन बिंदुओं की संख्या = x + y

उदाहरण :- अंजलि और बबिता एक ही समय से एक ही बिंदु पर क्रमशः 8 मीटर/सेकंड और 6 मीटर/सेकंड की गति से विपरीत दिशाओं में एक गोलाकार ट्रैक पर दौड़ रही हैं। यदि वृत्ताकार पथ की लंबाई 960 मीटर है, तो वे कितनी बार मिलेंगी?
SSC CHSL 09/06/2022 (Evening)
(a) 7 (b) 6 (c) 12 (d) 14
हल :- उन अलग-अलग बिंदुओं की संख्या, जिन पर वे (वृत्ताकार पथ पर) मिलेंगे, उनकी गति के अनुपात का पता लगाकर निर्धारित किया जा सकता है।
(a : b) चूँकि वे विपरीत दिशा में आगे बढ़ रहे हैं उनकी गति का अनुपात = 4 : 3 तो, वे 4 + 3 = 7 अलग-अलग बिंदुओं पर मिलेंगे

उदाहरण :- दो व्यक्तियों ने एक गोलाकार ट्रैक पर एक साथ विपरीत दिशाओं में 20 मीटर/सेकेंड और 30 मीटर/सेकेंड की गति से दौड़ना शुरू किया। यदि वृत्ताकार पथ की परिधि 100 मीटर है, तो ज्ञात कीजिए कि वे कितने अलग-अलग बिंदुओं पर एक-दूसरे को पार करेंगे?
SSC CGL 19/07/2023 (2nd shift)
(a) 3 (b) 2 (c) 10 (d) 5
हल :- प्रश्न के अनुसार,
गति का अनुपात ⇒ 2 : 3
जब दो धावक विपरीत दिशा में दौड़ रहे हों तो मिलन बिंदुओं की संख्या = (2 + 3) = 5

कुछ महत्वपूर्ण अवधारणा (कॉन्सेप्ट)

उदाहरण :- 1500 मीटर की दौड़ में, X, Y को 100 मीटर से हराता है और X, Z को 240 मीटर से हराता है। उसी दौड़ में Y ने Z को कितनी दूरी से हराया ?
SSC CGL 18/07/2023 (3rd shift)
(a) 160 m (b) 140 m (c) 150 m (d) 200 m
हल :-

Z	:	X	:	Y
		1500	:	1400
1260	:	1500		
126	:	150	:	140

तो, Y ने Z को हराया
= (140 − 126) = 14 इकाई
प्रश्न के अनुसार,
140 इकाई = 1500 = $\frac{1500}{140} \times 14$ = 150m
तो, Y ने Z को 150 मीटर से हराया ।

उदाहरण :- 500 मीटर की एक रैखिक दौड़ में, A, B को 50 मीटर से हरा सकता है और 600 मीटर की दौड़ में, B, C को 60 मीटर से हरा सकता है। 400 मीटर की दौड़ में A, C को कितने मीटर से हरा देगा?
SSC CGL 08/12/2022 (3rd Shift)
(a) 70 (b) 68 (c) 76 (d) 72
हल :- 500 मीटर की दौड़ में A और B द्वारा तय की गई दूरी का अनुपात
= 500 : 450 = 10 : 9
600 मीटर की दौड़ में B और C द्वारा तय की गई दूरी का अनुपात
= 600 : 540 = 10 : 9
उपरोक्त अनुपात को संतुलित करने पर:

A	:	B	:	C
10		9		) × 40
10		9) × 36		
400	:	360	:	324

स्पष्ट रूप से, हम देख सकते हैं कि A ने C को 400 मीटर की दौड़ में 76 मीटर यानी 400 - 324 से हरा दिया।

उदाहरण :- एक दौड़ में, एक प्रतियोगी को 6 सेबो को इकट्ठा करना पड़ता है जिन्हें एक ट्रैक पर एक सीधी रेखा में रखा गया है और ट्रैक की शुरुआत में एक बाल्टी रखी गई है जो एक शुरुआती बिंदु है। शर्त यह है कि प्रतियोगी एक बार में केवल एक सेब इकट्ठा कर सकता है, उसे लेकर वापस दौड़ सकता है और बाल्टी में डाल सकता है। यदि उसे सभी सेब बाल्टी में गिराने हैं, तो उसे कुल कितनी दूरी तय करनी होगी यदि बाल्टी पहले सेब से 5 मीटर की दूरी पर है और अन्य सभी सेब 3- मीटर की दूरी पर रखे गए हैं?
UPSC CSAT (07/08/2016)
(a) 40 m (b) 50 m (c) 75 m (d) 150 m
हल :-

पहला सेब उठाने के लिए प्रतियोगी द्वारा तय की गई दूरी
= 2 × 5 = 10 मीटर
प्रतियोगी द्वारा दूसरा सेब उठाने के लिए तय की गई दूरी
= 2(5 + 3) = 16 मीटर
तीसरा सेब उठाने के लिए प्रतियोगी द्वारा तय की गई दूरी
= 2(5 + 3 × 2) = 22 मीटर
चौथा सेब उठाने के लिए प्रतियोगी द्वारा तय की गई दूरी
= 2(5 + 3 × 3) = 28 मीटर
5वाँ सेब इकट्ठा करने के लिए प्रतियोगी द्वारा तय की गई दूरी
= 2(5 + 3 × 4) = 34 मी
छठा सेब उठाने के लिए प्रतियोगी द्वारा तय की गई दूरी
= 2(5 + 3 × 5) = 40 मी
तब , प्रतियोगी द्वारा तय की गई कुल दूरी
= 10 + 16 + 22 + 28 + 34 + 40 = 150 m

@apna.ppt

वैदिक गणित

वैदिक गणित ,गणितीय समस्याओं को तेज और आसान तरीके से हल करने के लिए तकनीकों/सूत्रों का एक संग्रह है।

जोड़ने की ट्रिक

विधि :- 1

चरण 1 : उस संख्या का पता लगाएं जो 10 के गुणज के सबसे करीब है क्योंकि उन संख्याओं को जोड़ना आसान है।

यानी 7, 8, 9, 10 के करीब

21, 22, 23, 20 के करीब

67, 68, 69, 70 के करीब

97, 98, 99, 100 के करीब..... इत्यादि।

चरण 2 : उन संख्याओं को जोड़ें जो 10 के गुणज हैं।

चरण 3 : संख्याओं की कमी को जोड़ें/घटाएँ।

उदाहरण :- 38 और 97 जोड़ें।
हल :-
चरण 1 : 38 और 97 क्रमशः 40 और 100 के करीब हैं।
चरण 2 : 40 और 100 को जोड़ने पर = 140
चरण 3 : दोनों संख्याओं में क्रमशः 2 और 3 की कमी है।
तो 140 - 5 = 135

उदाहरण :- 82 और 167 जोड़ें।
हल :-
चरण 1 : 82 और 167 क्रमशः 80 और 170 के करीब हैं।
चरण 2 : 80 और 170 को जोड़ने पर = 250
चरण 3 : 82 में 2 अतिरिक्त हैं और 167 में 3 कमी हैं।
तो 250 + 2 - 3 = 249

उदाहरण :- 146 और 467 जोड़ें।
हल :-
चरण 1 : 146 और 467 क्रमशः 150 और 470 के करीब हैं।
चरण 2 : 150 और 470 को जोड़ने पर = 620
चरण 3 : दोनों संख्याओं में क्रमशः 4 और 3 की कमी है।
तो 620 - 7 = 613

विधि :- 2

इकाई को इकाई के साथ जोड़ें, दहाई को दहाई के साथ जोड़ें, सैकड़ों को सैकड़ों के साथ जोड़ें, हजार को हजार के साथ जोड़ें, इत्यादि।

उदाहरण :- 357 + 576 + 457

(300 + 500 + 400) + (50 + 70 + 50) + (7 + 6 + 7) = 1200 + 170 + 20

सैकड़ा स्थान | दहाई स्थान | इकाई स्थान | 1390

विधि :- 3

एक दूसरे के करीब वाली संख्याओं को जोड़ने पर :
चरण 1 : छोटी संख्या को दोगुना करें।
चरण 2 : मूल संख्या के बीच का अंतर ज्ञात करें।
चरण 3 : अब दोनों परिणाम जोड़ें।

उदाहरण :- 63 + 71
चरण 1 : छोटी संख्या को दोगुना करें यानी 63 × 2 = 126
चरण 2 : मूल संख्या के बीच का अंतर यानी i.e. 71 - 63 = 8
चरण 3 : दोनों परिणामों को जोड़ें यानी 126 + 8 = 134

उदाहरण :- 615 + 632
चरण 1 : छोटी संख्या को दोगुना करें यानी 615 × 2 = 1230
चरण 2 : मूल संख्या के बीच का अंतर यानी 632 - 615 = 17
चरण 3 : दोनों परिणामों को जोड़ें यानी 1230 + 17 = 1247

घटाने की ट्रिक

विधि :- 1

उदाहरण :- 357 + 576 - 475

(300 + 500 - 400) + (50 + 70 - 70) + (7 + 6 - 5) = 400 + 50 + 8

सैकड़ा स्थान | दहाई स्थान | इकाई स्थान | 458

विधि :- 2

जब दो अंकों वाली संख्या को उसके उलटे अंकों वाली संख्या से घटाया जाए :-
चरण 1 : अंकों के बीच अंतर ज्ञात करें।
चरण 2 : अंतर को 9 से गुणा करें

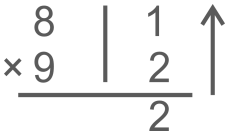
उदाहरण :- 63 - 36
चरण 1 : अंकों के बीच अंतर ज्ञात करें अर्थात 6 - 3 = 3
चरण 2 : अंतर को 9 से गुणा करें अर्थात 3 × 9 = 27

गुणा करने की ट्रिक

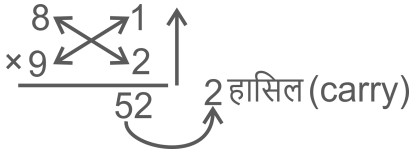
(a) 2 अंकीय गुणन के लिए :-

विधि :- 1

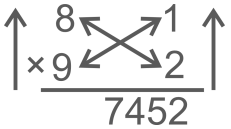
उदाहरण :- 81× 92
चरण 1 : इकाइयों के स्थान को लंबवत रूप से गुणा करना



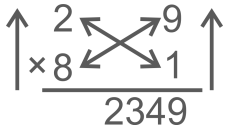
चरण 2 :
क्रॉस पैटर्न में गुणा करना और परिणाम जोड़ना। उदाहरण के लिए, 8 × 2 = 16 और 9 × 1 = 9 और 16 + 9 = 25.



चरण 3 : दहाई के अंक को लंबवत रूप से गुणा करना।
उदाहरण के लिए, 8 × 9 = 72 + 2 (carry) = 74

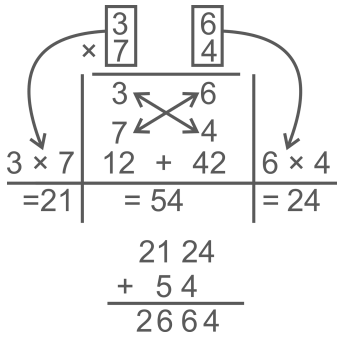


उदाहरण :- 29 × 81

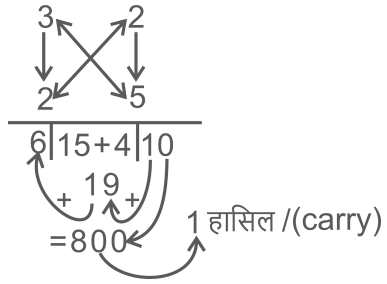


@apna_pdf

उदाहरण :- 36 × 74



उदाहरण :- 32 × 25



विधि 2 :-

जब सम संख्या को 5 से समाप्त होने वाली संख्या से गुणा किया जाता है

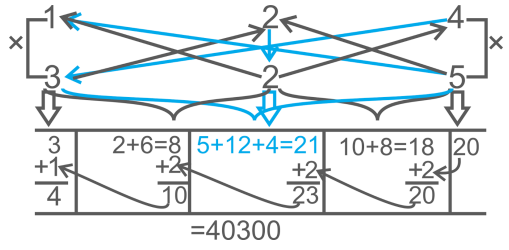
चरण 1 : उस संख्या को दोगुना करें जो 5 पर समाप्त हो रही है।
चरण 2 : दी गई सम संख्या को 2 से विभाजित करे
चरण 3 : अब दोनों परिणामों को गुणा करें

उदाहरण :- 36 × 65 का मान ज्ञात करे ?
चरण 1 : उस संख्या को दोगुना करें जो 5 पर समाप्त हो रही है यानि 65 × 2 = 130
चरण 2 : दी गई सम संख्या को 2 से विभाजित करे ⇒ $\frac{36}{2}$ = 18
चरण 3 : दोनों परिणामों को गुणा करने पर = 130 × 18 = 2340

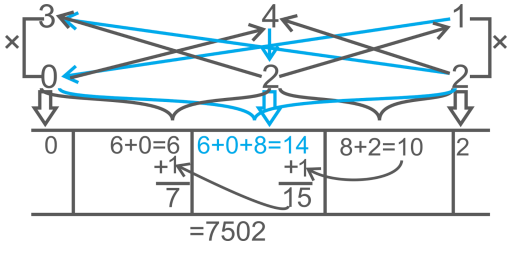
(b) 3 अंकों के गुणन के लिए :-

विधि 1:-

उदाहरण :-



उदाहरण :- 341 × 22



विधि 2 :-

दो संख्याओं का गुणन जिसमें एक संख्या में केवल 9 होता है।

चरण 1 : 9 से गुणा की जाने वाली संख्या को पहले 1 से घटाया जाता है और वह परिणाम पहला भाग होगा।
चरण 2 : 9 से बनी संख्या से परिणाम घटाएं।
चरण 3 : दोनों संख्याओं को मिलाएं।

उदाहरण :- 423 × 999
चरण 1 : जिस संख्या को 9 से गुणा किया जा रहा है उसे पहले 1 से घटाया जाता है और परिणाम पहला भाग होगा यानी 423 - 1 = 422
चरण 2 : 9 से बनी संख्या से परिणाम घटाएं यानी 999 - 422 = 577
चरण 3 : दोनों संख्याओं यानी 422,577 को मिलाएं

विधि 3 :-

तीन अंकों की दो संख्याओं को गुणा करना जिनके बीच शून्य है

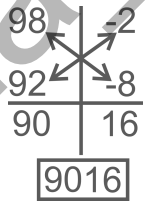
203 × 809 :-
2 × 8 = 16, 2(9) + 3(8) = 42, 3 × 9 = 27
अब, तीनों परिणामों को मिलाकर, हमें प्राप्त होता है, 164227

(c) उन संख्याओं को गुणा करना जो 10 की घात के करीब हों :-

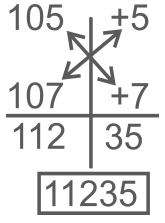
चरण 1 : ज्ञात करें कि कोई संख्या 10 की घात से कितनी अधिक या कम है और इसे ऊर्ध्वाधर रेखा के दाईं ओर लिखें।
चरण 2 : या तो क्रॉस घटाएँ या क्रॉस जोड़ें। यह अंतिम उत्तर का पहला भाग बनेगा।
चरण 3 : ऊर्ध्वाधर रेखा के दाईं ओर को गुणा करें और यह परिणाम का बयां हिस्सा बन जाएगा।

1). यहां आधार 100 है

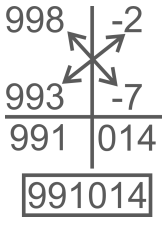
उदाहरण :- 98 × 92



उदाहरण :- 105 × 107



2). यहां आधार 1000 है



(d) 5, 25, 125, 625 से गुणा

$5 \rightarrow \frac{10}{2}$, $25 \rightarrow \frac{100}{4}$, $125 \rightarrow \frac{1000}{8}$, $625 \rightarrow \frac{10000}{16}$

1). 5 से गुणा करने पर

N × 5 अर्थात $N \times \frac{10}{2}$

$36 \times 5 = 36 \times \frac{10}{2} = 180$

$78 \times 5 = 78 \times \frac{10}{2} = 390$

$128 \times 5 = 128 \times \frac{10}{2} = 640$

$946 \times 5 = 946 \times \frac{10}{2} = 473$

@apna_pdf

2). किसी संख्या को 25 से गुणा करना

जैसा कि हम जानते हैं , $25 = \frac{100}{4}$

चरण 1 : संख्या को 4 से विभाजित करें
चरण 2 : परिणामी के साथ (00) का प्रयोग करें।

उदाहरण :- 748 × 25 का मान ज्ञात कीजिए ?
चरण 1 : संख्या को 4 से विभाजित करें ⇒ $\frac{748}{4}$ = 187
चरण 2 : परिणामी के साथ (00) का प्रयोग करें ⇒ 18700

3). 125 से गुणा करने पर

N × 125 अर्थात $N \times \frac{1000}{8}$

$64 \times 125 = 64 \times \frac{1000}{8} = 8000$

$512 \times 125 = 512 \times \frac{1000}{8} = 64000$

$48 \times 125 = 48 \times \frac{1000}{8} = 6000$

4). किसी संख्या को 625 से गुणा करना

N × 625 अर्थात $N \times \frac{10000}{16}$

$64 \times 625 = 64 \times \frac{10000}{16} = 40{,}000$

$80 \times 625 = 80 \times \frac{10000}{16} = 50{,}000$

(e) 101 और 1001 से गुणा करने पर

42 × 101 = 4242
53 × 101 = 5353
87 × 1001 = 87087
92 × 1001 = 92092
123 × 1001 = 123123
456 × 1001 = 456456

(f) एक सम संख्या को एक दशमलव संख्या से गुणा करना जो कि 5 का गुणज है।

$54 \times 1.5 = 54 \times \frac{3}{2} = 81$

$42 \times 2.5 = 42 \times \frac{5}{2} = 105$

$86 \times 3.5 = 86 \times \frac{7}{2} = 43 \times 7 = 301$

$44 \times 4.5 = 44 \times \frac{9}{2} = 198$

(g) सम संख्या को 15 से गुणा करने पर

N × 15 ⇒ (स्वयं के आधे भाग में N जोड़ना) ×10
56 × 15 ⇒ (56 + 28) × 10 = 840
78 × 15 ⇒ (78 + 39) × 10 = 1170

(h) किसी संख्या को उसी के दोगुने से गुणा करना

$N \times 2N = 2N^2$
$17 \times 34 = 2(17)^2 = 2(289) = 578$
$21 \times 42 = 2(21)^2 = 2(441) = 882$

विभाजन

(a) समान दोहरे अंक वाली संख्या (11, 22, 33, 44 आदि) से विभाजन

इस प्रकार के विभाजन में, संख्याएँ इस प्रकार होती हैं जैसे जब हम संख्या का पहला और अंतिम अंक जोड़ते हैं, तो हमें मध्य अंक प्राप्त होती है

यानि 792 (7 + 2) = 9

उदाहरण :- 792 ÷ 55 का मान ज्ञात कीजिए ?
संख्या का पहला और अंतिम अंक चुनें और उसे 5 से भाग दें
$\frac{72}{5}$ = 14.4

उदाहरण :- 682 ÷ 77 का मान ज्ञात कीजिए ?
संख्या का पहला और अंतिम अंक चुनें और उसे 7 से भाग दें
$\frac{62}{7}$ = 8.85

(b) किसी संख्या का 25 से विभाजन

जैसा कि हम जानते हैं , $25 = \frac{100}{4}$

उदाहरण :- 35 ÷ 25 का मान ज्ञात कीजिए ?
दी गई संख्या का 4 गुना करें और दाहिनी ओर से 2 स्थान के बाद दशमलव लगाए।
35 × 4 = 140 = 1.4

उदाहरण :- 354 ÷ 25 का मान ज्ञात कीजिए ?
दी गई संख्या का 4 गुना करें और दाहिनी ओर से 2 स्थान के बाद दशमलव लगाए।
354 × 4 = 1416 = 14.16

(c) किसी संख्या का 5 से विभाजन

जैसा कि हम जानते हैं , $5 = \frac{10}{2}$

उदाहरण :- 47 ÷ 5 का मान ज्ञात कीजिए ?
संख्या को दोगुना करें और दाहिनी ओर से एक स्थान के बाद दशमलव रखें।
47 × 2 = 94 = 9.4

उदाहरण :- 576 ÷ 5 का मान ज्ञात कीजिए ?
संख्या को दोगुना करें और दाहिनी ओर से एक स्थान के बाद दशमलव रखें।
576 × 2 = 1152 = 115.2

(d) किसी संख्या का 0.125 विभाजन से

जैसा की हम जानते हैं 0.125 = $\frac{1}{8}$

उदाहरण :- 235 ÷ 0.125 का मान ज्ञात करे ?
दी गई संख्या को 8 से गुणा करे
235 × 8 = 1880

उदाहरण :- 28 ÷ 0.125 का मान ज्ञात कीजिए ?
दी गई संख्या को 8 से गुणा करे
28 × 8 = 224

(e) किसी भी संख्या का 9 , 99 , 999 ... से विभाजन

यदि दी गई संख्या में एक 9 और एक अंक है .

उदाहरण :- (4 ÷ 9) = 0.44444.....

@apna_pdf

यदि दी गई संख्या में दो 9 और दो अंक हो

उदाहरण :- 53 ÷ 99 = 0 . 535353.....

यदि दी गई संख्या में तीन 9 और दो अंक हो ।

उदाहरण :- 76 ÷ 999 = 0 . 076076076.....

वर्ग ज्ञात करने की ट्रिक

(a) इकाई अंक 5 वाली संख्याओं का वर्ग :

सूत्र: 'पिछले वाले से एक अधिक'

$(AB)^2$ = A × (A +1) 25पर समाप्त होता है यंहा (B = 5 हमेशा)

25^2 = 2 × (2 + 1) .....25 = 2 × 3 ..... 25 = 625

35^2 = 3 × 4 ..... 25 = 1225

65^2 = 6 × 7 ..... 25 = 4225

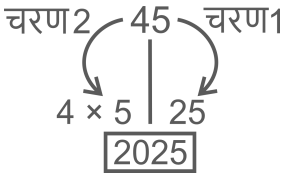
135^2 = 13 × 14 ..... 25 = 18225

उदाहरण :- $(45)^2$

चरण 1 - अंतिम भाग के लिए सरल शब्दों में $(5)^2$ = 25 रखे

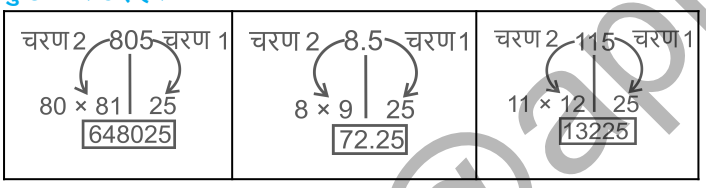
चरण 2 - 4 को उसकी अगली संख्या यानी 5 से गुणा करें

तो, 45 × 45 = 2025

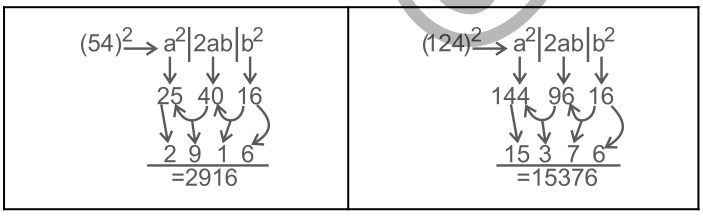


नोट :- यह विधि किसी भी आकार की संख्याओं पर लागू होती है।

कुछ और उदाहरण :-



(b) किसी भी संख्या का वर्ग :



नोट :- इन्हें मिलाते समय दाहिने सिरे से शुरुआत करें।

(c) 50 के करीब और 50 से नीचे की किसी भी संख्या का वर्ग :

चरण 1 : 50 से संख्या का अंतर जांचें

चरण 2 : 25 में से अंतर घटाएं और बाएं से पहला भाग लिखें।

चरण 3 : अंतर के वर्ग को दाएं से पहले भाग के रूप में लिखें

उदाहरण :-

$(43)^2$

चरण 1 : 50 - 43 = 7

चरण 2 : 25 - 7 | 7^2

चरण 3 : 18 | 49 → 1849

नोट :- 50 से नीचे की संख्याओं का वर्ग हमेशा 2500 से नीचे रहेगा इसलिए घटाने के लिए हमारा आधार 25 होगा।

(d) 50 के करीब और 50 से ऊपर की किसी भी संख्या का वर्ग :

चरण 1 - संख्या से 50 का अंतर जांचें।

चरण 2 - 25 में अंतर जोड़ें और बाएं से पहला भाग लिखें।.

चरण 3 - अंतर के वर्ग को दाएं से पहले भाग के रूप में लिखें

उदाहरण :-

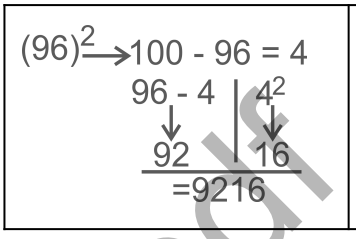
$(58)^2$

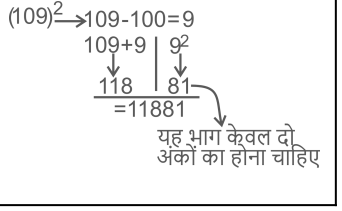
चरण 1 : 58 - 50 = 8

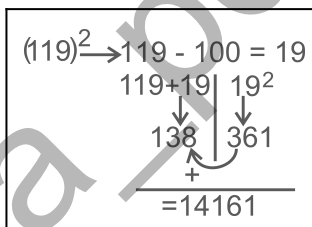
चरण 2 : 25 +8 | 8^2

चरण 3 : 33 | 64 → 3364

(e) आधार 10, 100, 1000 आदि के निकट किसी भी संख्या का वर्ग :





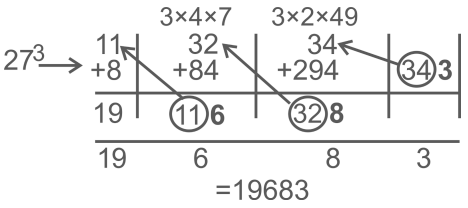


घन ज्ञात करने की ट्रिक

Type - 1

हम वह जानते हैं $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

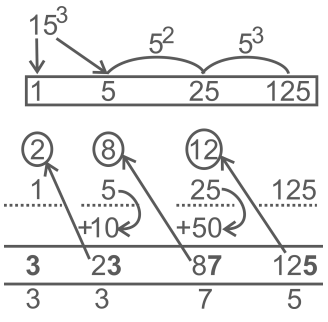
$(ab)^3 = a^3 \mid 3a^2b \mid 3ab^2 \mid b^3$ **को इस रूप में लिखें**



Type - 2

जब पहला अंक 1 हो ।

उदाहरण :- 12 , 13, 14 इत्यादि

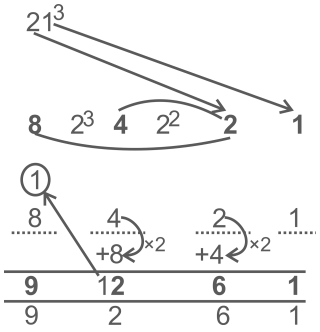


@apna pdf

Type - 3

जब अंतिम अंक 1 हो।

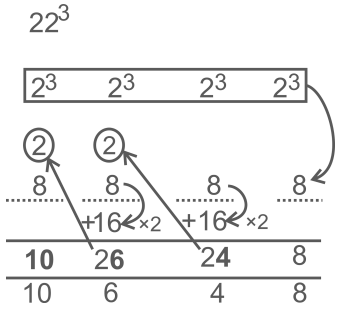
उदाहरण :- 21 , 31, 41 इत्यादि



Type - 4

जब दोनों अंक समान हो।

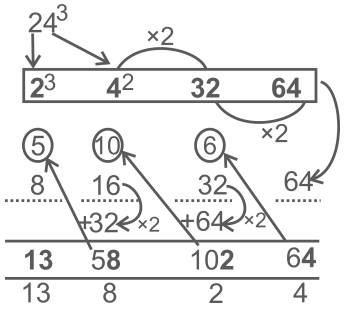
उदाहरण :- 22 , 33, 44 इत्यादि



Type - 5

मिश्रित संख्या

उदाहरण :- 24 , 26 , 46 इत्यादि



@apna_pdf

Click Here To Join our Telegram Channel

वर्गमूल और घनमूल

वर्गमूल

किसी संख्या का वर्गमूल वह मान है, जिसे स्वयं से गुणा करने पर मूल संख्या प्राप्त होती है।
जैसे:- 36 के दो वर्गमूल हैं 6 और - 6
$6^2 = 36$ और $-6^2 = 36$ इसलिए हम लिखते हैं $\sqrt{36} = \pm 6$

1). गुणनखंड विधि द्वारा वर्गमूल :-

उदाहरण :- 1089 का वर्गमूल ज्ञात करे।
हल :- सबसे पहले 1089 के गुणनखंडो का पता लगाएं

3 | 1089
3 | 363
11 | 121
| 11

1089 = 3 × 3 × 11 × 11
$\sqrt{1089} = 3 \times 11 = 33$

2). भाग विधि द्वारा वर्गमूल :-

उदाहरण :- 2304 का वर्गमूल ज्ञात करे।
हल :- सबसे पहले 2304 के गुणनखंडो का पता लगाएं ।

48
4 | 23 04
+4 | 16
88 | 704
| 704
| xxx

नोट :- दाईं ओर से दो अंकों का समूह बनाएं।
$\sqrt{2304} = 48$

3). वर्गमूल ज्ञात करने की शार्ट ट्रिक :-

Exam Hall Approach :-

उदाहरण :- 2304 का वर्गमूल ज्ञात कीजिये ?
हल :-
चरण 1 : दी गई संख्या का इकाई अंक लें, फिर उन संख्याओं को लिखें जिनके वर्ग का इकाई अंक दी गई संख्या के इकाई अंक के समान हो

2 3 0 4
$2^2 = 4$ $8^2 = 64$

चरण 2 : अब दाहिनी ओर से अंतिम दो संख्या को छोड़ दें, और पहली दो संख्या यानी 23 को ले
चरण 3 : फिर वह संख्या लिखे जिन संख्याओ (4 और 5) का वर्ग , के बीच में 23 आता हो । जैसे $4^2 < 23 < 5^2$
नोट : हमेशा छोटी संख्या चुनें

2 3 | 0 4 हटा देना
$4^2 = 16$ $5^2 = 25$

अब हमारे पास दो मान 42 और 48 हैं
चरण 4 : छोटी संख्या को उसकी क्रमिक संख्या से गुणा करें
(a ×(a + 1) i.e. 4 × 5 = 20
अब , 20 < 23
नोट: यदि गुणनफल छोटा है तो हम बड़ी संख्या लेंगे अर्थात 48 और यदि गुणनफल बड़ा है तो हम छोटी संख्या लेंगे अर्थात 42

2304 हटा देना
4(4+1) = 20 < 23

तो उत्तर होगा 48 .

उदाहरण :- $\sqrt{676}$ = ?
हल :-

6 | 76 हटा देना
2(2 + 1) = 6 = 6
6
4

जहां 6, 2 और 3 के वर्ग के बीच स्थित है, लेकिन हम जानते हैं कि हम हमेशा छोटी संख्या (2) लेते हैं।
तो, हमारे पास दो संख्याएँ 24 और 26 हैं
अब a ×(a + 1) = 2 × 3 = 6
नोट :- यदि गुणनफल(2 × 3 = 6) , विलोपन के बाद बचे शेष अंक(6) के बराबर है तो हम हमेशा बड़ी संख्या लेंगे । जैसे 26

गैर पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने की विधि :-

उदाहरण :- 171का वर्गमूल ज्ञात कीजिये ?
हल :-
चरण 1 : दी गयी संख्या को उसके निकटम पूर्ण वर्ग संख्या से तोड़ें
अतः $\sqrt{171} = \sqrt{169 + 2}$
चरण 2 : हम जानते है $\sqrt{169} = 13$

$\sqrt{169 + 2}$
13 + $\frac{2}{26}$
×2

$\Rightarrow \sqrt{171} = 13 + 0.076 = 13.076$

उदाहरण :- 395 का वर्गमूल ज्ञात कीजिये ?
हल :-
चरण 1 : दी गई संख्या का निकटतम पूर्ण वर्ग मान ज्ञात करना
अतः , $\sqrt{395} = \sqrt{400 - 5}$
चरण 2 : जैसा कि हम जानते हैं , $\sqrt{400} = 20$

$\sqrt{400 - 5}$
20 - $\frac{5}{40}$
×2

@apna pdf

⇒ $\sqrt{395}$ = 20 - 0.125 = 19 . 875

महत्वपूर्ण तालिका

यदि कोई संख्या इन अंकों के साथ समाप्त होती हो	वर्गमूल इन अंकों के साथ समाप्त होगा
1	1 या 9
4	2 या 8
9	3 या 7
16	4 या 6
25	5

1) अगर कोई संख्या 1 के साथ समाप्त होती है, तो इसका वर्गमूल 1 या 9 के साथ समाप्त होगा, यह देखते हुए कि संख्या एक पूर्ण वर्ग है।
जैसे:- $\sqrt{81} = 9, \sqrt{121} = 11$

2) अगर कोई संख्या 4 के साथ समाप्त होती है, तो इसका वर्गमूल 2 या 8 के साथ समाप्त होगा, यह देखते हुए कि संख्या एक पूर्ण वर्ग है।
जैसे:- $\sqrt{324} = 18, \sqrt{144} = 12$

3) अगर कोई संख्या 5 के साथ समाप्त होती है, तो इसका वर्गमूल 5 के साथ समाप्त होगा, यह देखते हुए कि संख्या एक पूर्ण वर्ग है।
जैसे:- $\sqrt{225} = 15, \sqrt{625} = 25$

4). अगर कोई संख्या 6 के साथ समाप्त होती है, तो इसका वर्गमूल 6 के साथ समाप्त होगा, यह देखते हुए कि संख्या एक पूर्ण वर्ग है।
जैसे:- $\sqrt{256} = 16, \sqrt{676} = 26$

5). अगर कोई संख्या 9 के साथ समाप्त होती है, तो इसका वर्गमूल 3 या 7 के साथ समाप्त होगा,
यह देखते हुए कि संख्या एक पूर्ण वर्ग है।
जैसे:- $\sqrt{49} = 7, \sqrt{169} = 13$

6). किसी भी संख्या के वर्ग का इकाई अंक 2, 3, 7 या 8 नहीं होता है।

7) एक पूर्ण वर्ग के अंकों का दोहराव योग सदैव 1, 4, 7 या 9 होता है।

घनमूल

किसी संख्या का घनमूल वह मान होता है जिसे स्वयं से तीन या तीन बार गुणा करने पर मूल मान प्राप्त होता है।
जैसे:- 27 का घनमूल, जिसे $\sqrt[3]{27}$ के रूप में दर्शाया गया है, 3 है, क्योंकि जब हम 3 को स्वयं से तीन बार गुणा करते हैं तो हमें 3 × 3 × 3 = 27 = 3^3 प्राप्त होता है।

उदाहरण :- 64 का घनमूल ज्ञात कीजिए।
हल :- 64 का घनमूल ज्ञात करने के लिए, हमें अभाज्य गुणनखंड विधि का उपयोग करना होगा।
64 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 64 = 4 × 4 × 4 = 64 = 4^3
अब दोनों तरफ से घनमूल लेने पर हमें प्राप्त होता है;
$\sqrt[3]{64}$ = 4

उदाहरण:- $\sqrt[3]{343}$ ज्ञात कीजिए।
हल:- अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 343 = 7 × 7× 7 = 343 = 7^3
$\sqrt[3]{343}$ = 7

N^3		इकाई अंक
1^3	1	1
2^3	8	8
3^3	27	7
4^3	64	4
5^3	125	5
6^3	216	6
7^3	343	3
8^3	512	2
9^3	729	9

उदाहरण :- 6859 का घनमूल ज्ञात कीजिए ?
हल :-
चरण 1 : दी गई संख्या के अंतिम तीन अंकों की उपेक्षा करें

6(8 5 9)

चरण 2: अब 6 से छोटी पूर्ण घन संख्या ज्ञात कीजिए जो 1^3 = 1
चरण 3: $\sqrt[3]{6859}$ = 19
उत्तर संख्या का इकाई अंक =
जिस संख्या के पूर्ण घन का इकाई अंक दी गयी संख्या के इकाई अंक के बराबर होगा वह संख्या होगी

6(8 5 9) → 9^3 का इकाई अंक

जैसे :- 9^3 = 729 तो इसलिए उत्तर संख्या का इकाई अंक = 9

उदाहरण :- 9683 का घनमूल ज्ञात कीजिए ?
हल :-
चरण 1 : दी गई संख्या के अंतिम तीन अंकों की उपेक्षा करें

19(683)

चरण 2 :अब 19 से छोटी पूर्ण घन संख्या ज्ञात कीजिए जो 2^3 = 8
चरण 2 : $\sqrt[3]{19683}$ = 27
उत्तर संख्या का इकाई अंक =
जिस संख्या के पूर्ण घन का इकाई अंक दी गयी संख्या के इकाई अंक के बराबर होगा वह संख्या होगी

19(683) → 7^3 का इकाई अंक

जैसे :- 7^3 = 343 तो इसलिए उत्तर संख्या का इकाई अंक = 7

उदाहरण :-274625 का घनमूल ज्ञात कीजिए ?
हल :-
चरण 1 : दी गई संख्या के अंतिम तीन अंकों की उपेक्षा करें

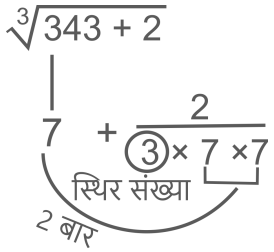
274(6 2 5)

चरण 2 : अब 274 से छोटी पूर्ण घन संख्या ज्ञात कीजिए जो 6^3 = 216
चरण 3 : $\sqrt[3]{274625}$ = 65
उत्तर संख्या का इकाई अंक =
जिस संख्या के पूर्ण घन का इकाई अंक दी गयी संख्या के इकाई अंक के बराबर होगा वह संख्या होगी

@apna_pdf

गैर पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करने की विधि :-

उदाहरण :- 345 का घनमूल ज्ञात कीजिए ?
हल :-
चरण 1 :दी गयी संख्या को उसके निकटम पूर्ण घन संख्या से तोड़ें
जैसे $\sqrt[3]{345} = \sqrt[3]{343 + 2}$
चरण 2 : हम जानते है $\sqrt[3]{343} = 7$



$\Rightarrow \sqrt[3]{345} = 7 + 0.0136 = 7.0136$

वर्ग दर्पण

- $14^2 + 87^2 = 78^2 + 41^2$
- $15^2 + 75^2 = 57^2 + 51^2$
- $26^2 + 97^2 = 79^2 + 62^2$
- $27^2 + 96^2 = 69^2 + 72^2$

पूर्ण वर्ग होने की स्थिति :-

1. किसी पूर्ण वर्ग संख्या के इकाई अंक में 2, 3, 7 या 8 नहीं होना चाहिए।
2. यदि किसी संख्या का इकाई अंक 5 है, तो उसके वर्ग का दहाई अंक सदैव 2 होता है।
3. यदि एक वर्ग संख्या शून्य पर समाप्त होती है, तो शून्य की संख्या 2 के गुणज में होनी चाहिए। जैसे $20^2 = 400$, $100^2 = 10000$

वर्ग, घन और वर्गमूल

वर्ग		
$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$

घन		
$1^3 = 1$	$11^3 = 1331$	$21^3 = 9261$
$2^3 = 8$	$12^3 = 1728$	$22^3 = 10648$
$3^3 = 27$	$13^3 = 2197$	$23^3 = 12167$
$4^3 = 64$	$14^3 = 2744$	$24^3 = 13824$
$5^3 = 125$	$15^3 = 3375$	$25^3 = 15625$
$6^3 = 216$	$16^3 = 4096$	$26^3 = 17576$
$7^3 = 343$	$17^3 = 4913$	$27^3 = 19683$
$8^3 = 512$	$18^3 = 5832$	$28^3 = 21952$
$9^3 = 729$	$19^3 = 6859$	$29^3 = 24389$
$10^3 = 1000$	$20^3 = 8000$	$30^3 = 27000$

वर्गमूल	
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{5} = 2.236$
$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{6} = 2.449$
$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{7} = 2.645$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{8} = 2.828$

व्यंजक	परिणाम	व्यंजक	परिणाम	व्यंजक	परिणाम
2^1	2	3^1	3	4^1	4
2^2	4	3^2	9	4^2	16
2^3	8	3^3	27	4^3	64
2^4	16	3^4	81	4^4	256
2^5	32	3^5	243	4^5	1024
2^6	64	3^6	729	5^1	5
2^7	128	3^7	2187	5^2	25
2^8	256	3^8	6561	5^3	125
2^9	512	3^9	19683	5^4	625
2^{10}	1024	3^{10}	59049	5^5	3125

@apna_pdf

Click Here To Join our Telegram Channel

संख्या श्रृंखला

श्रृंखला की मूल बातें - इस अध्याय में संख्याओं की एक श्रृंखला दी गई है, जिसमें उन्हें एक विशेष नियम के तहत व्यवस्थित किया गया है। ये सीरीज कई तरह से बनती हैं और इनमें अलग-अलग नियम काम करते हैं. इसके अतिरिक्त, कभी-कभी इस श्रृंखला में कोई एक पद गलत दिया गया है और यह पता लगाना आवश्यक है कि दिए गए प्रश्न में कौन सा पद गलत है।

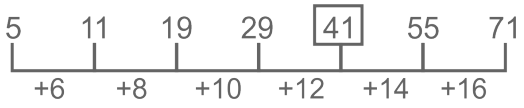
श्रृंखला पैटर्न के प्रकार

Type - 1
(के आधार पर)

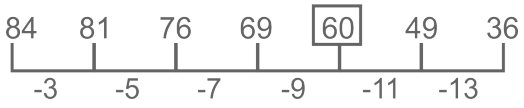
जोड़ / घटाव

यदि अंतर की सीमा कम है तो इस पैटर्न का पालन किया जाएगा।

उदाहरण :- 5 , 11 , 19 , 29 , ? , 55 , 71
हल :- तर्क → श्रृंखला जोड़ पर आधारित है

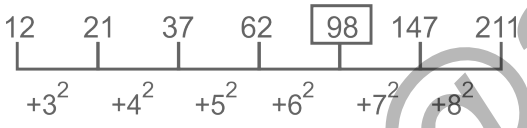


उदाहरण :- 84 , 81, 76 , 69 , ?, 49 , 36
हल :- तर्क → श्रृंखला घटाव पर आधारित है

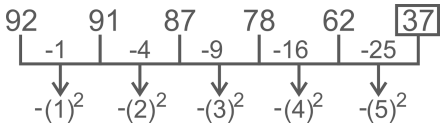


पूर्ण वर्ग का जोड़/घटाव

उदाहरण :- . 12 , 21 , 37 , 62 , 98 , 147 , ?
हल :- तर्क → श्रृंखला एक पूर्ण वर्ग पर आधारित है।

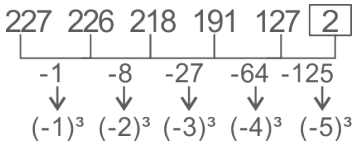


उदाहरण :- 92 91 87 78 62 ?
SSC MTS 12/09/2023 (3rd Shift)
(a) 37 (b) 38 (c) 35 (d) 36
हल :-

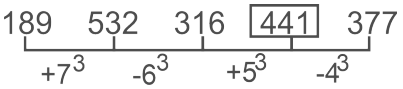


पूर्ण घन का जोड़/घटाव

उदाहरण :- 227 226 218 191 127 ?
SSC MTS 12/09/2023 (2nd Shift)
(a) 3 (b) 4 (c) 2 (d) 1
हल :-

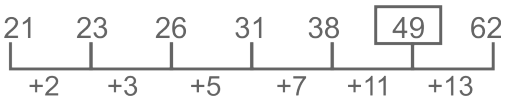


उदाहरण :- 189, 532, 316, ? , 377
SSC CGL Tier II (03/03/2023)
(a) 384 (b) 291 (c) 441 (d) 405
हल :-



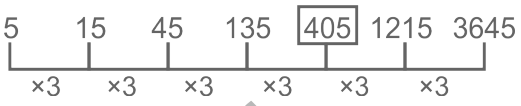
अभाज्य संख्याओं का जोड़/घटाव

उदाहरण :- 21 , 23 , 26 , 31 , 38 , ? , 62
हल :- तर्क → श्रृंखला एक अभाज्य संख्या पर आधारित है।



गुणा / भाग

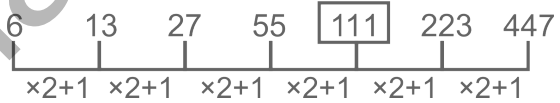
उदाहरण :- 5 , 15 , 45 , 135 , ? , 1215 , 3645
हल :- तर्क → श्रृंखला गुणन पर आधारित है



उदाहरण :- 7500 , 1500 , 300 , ? , 12
हल :- तर्क → श्रृंखला भाग पर आधारित है

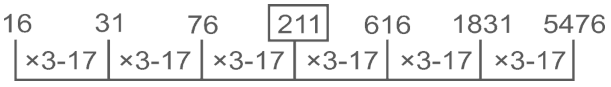
गुणा और जोड़

उदाहरण :- 6 , 13 , 27, 55 , ? , 223 , 447
हल :- तर्क → श्रृंखला गुणन और जोड़ पर आधारित है।



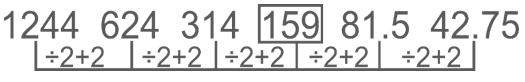
गुणा और घटाव

उदाहरण :- 16 31 76 ? 616 1831 5476
SSC MTS 05/09/2023 (2nd Shift)
(a) 217 (b) 201 (c) 207 (d) 211
हल :-



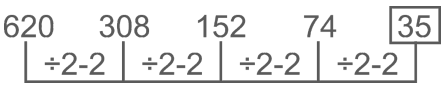
भाग और जोड़

उदाहरण :- 1244 , 624 , 314 , ? , 81.5 , 42.75
SSC CHSL 27/05/2022 (Evening)
(a) 156 (b) 159 (c) 155.5 (d) 157
हल :-



घटाव और भाग

उदाहरण :- 620 , 308 , 152 , 74, ?
हल :-

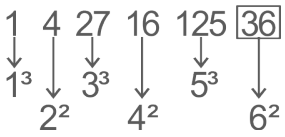


@apna_pdf

Type - 2

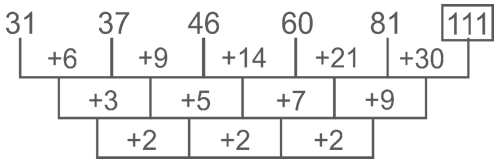
पूर्ण घन श्रृंखला

उदाहरण :- 1, 4, 27, 16, 125, ?
SSC CGL 24/07/2023 (2nd shift)
(a) 216 (b) 36 (c) 343 (d) 49
हल :-

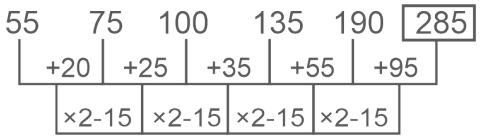


एक से अधिक स्तरीय श्रृंखला

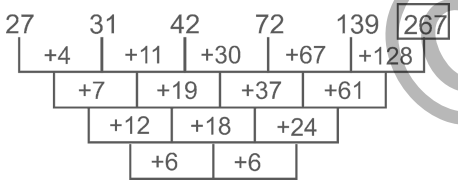
उदाहरण :- 31, 37, 46, 60, 81, ?
SSC CGL 24/07/2023 (4th shift)
(a) 117 (b) 106 (c) 122 (d) 111
हल :-



उदाहरण :- 55, 75, 100, 135, 190, ?
SSC CPO 10/11/2022 (Afternoon)
(a) 280 (b) 285 (c) 295 (d) 290
हल :-

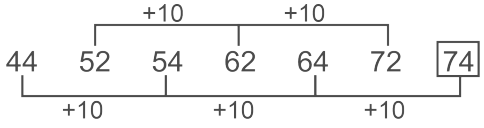


उदाहरण :- 27 , 31 , 42 , 72 , 139 , ?
SSC CHSL 06/06/2022 (Morning)
(a) 267 (b) 264 (c) 271 (d) 355
हल :-

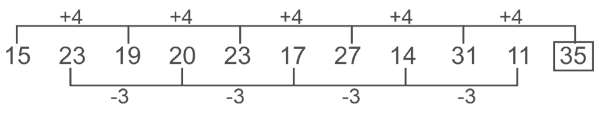


वैकल्पिक मिश्रित श्रृंखला

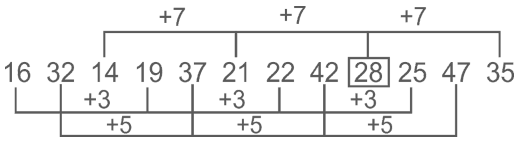
उदाहरण :- 44, 52, 54, 62, 64, 72, ?
SSC MTS 04/05/2023 (Morning)
(a) 96 (b) 79 (c) 74 (d) 85
हल :-



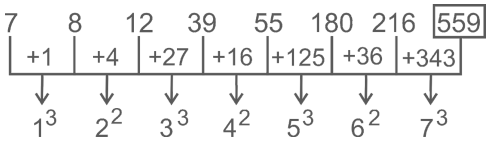
उदाहरण :- 15, 23,19, 20, 23, 17, 27,14, 31, 11, ?
SSC MTS 11/05/2023 (Afternoon)
(a) 35 (b) 15 (c) 19 (d) 32
हल :-



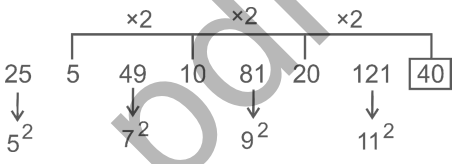
उदाहरण :- 16, 32,14, 19, 37, 21, 22, 42, ?, 25, 47, 35
SSC MTS 12/07/2022 (Afternoon)
(a) 34 (b) 26 (c) 32 (d) 28
हल :-



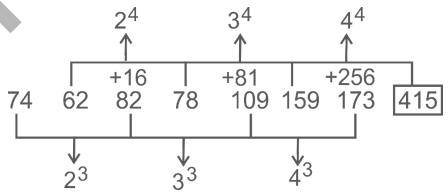
उदाहरण :- 7 , 8 , 12 , 39 , 55 , 180 , 216 , ?
SSC CHSL 27/05/2022 (Evening)
(a) 555 (b) 559 (c) 595 (d) 599
हल :-



उदाहरण :- 25 , 5 , 49 , 10 , 81 , 20 , 121 , ?
SSC CHSL 17/03/2020 (Evening)
(a) 30 (b) 40 (c) 25 (d) 35
हल :-

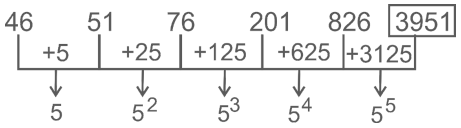


उदाहरण :- 74 , 62 , 82 , 78 , 109 ,159 ,173 , ?
SSC CHSL 01/06/2022 (Morning)
(a) 223 (b) 375 (c) 415 (d) 295
हल :-

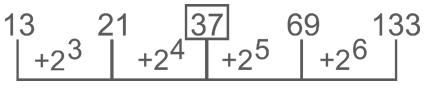


बढ़ती हुई घात श्रृंखला

उदाहरण :- 46, 51, 76, 201, 826, ?
SSC CHSL 13/03/2023 (3rd Shift)
(a) 3757 (b) 3951 (c) 4853 (d) 3631
हल :-



उदाहरण :-13, 21, ?, 69, 133
Graduate Level 02/08/2022 (Shift - 3)
(a) 52 (b) 37 (c) 33 (d) 41
हल :-

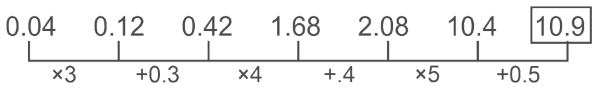


दशमलव और भिन्नात्मक

उदाहरण :- 0.04, 0.12, 0.42, 1.68, 2.08, 10.4, ?
Graduate Level 27/06/2023 (Shift - 4)
(a) 12.3 (b) 12.9 (c) 11.8 (d) 10.9

@apna_pdf

हल :-

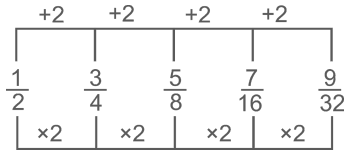


उदाहरण :- क्रम में आगे कौन सा भिन्न आएगा ?

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, ?$

(a) $\frac{9}{32}$ (b) $\frac{10}{17}$ (c) $\frac{11}{34}$ (d) $\frac{12}{35}$

हल :-

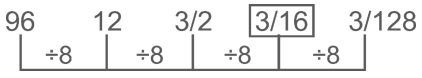


उदाहरण :- $96, 12, \frac{3}{2}, ?, \frac{3}{128}$

SSC CPO 05/10/2023 (2nd Shift)

(a) $\frac{3}{12}$ (b) $\frac{3}{16}$ (c) $\frac{3}{64}$ (d) $\frac{1}{128}$

हल :-



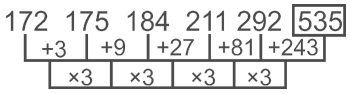
मिश्रित शृंखला

उदाहरण :- 172, 175, 184, 211, 292, ?

SSC CHSL 17/08/2023 (1st Shift)

(a) 535 (b) 537 (c) 534 (d) 532

हल :-

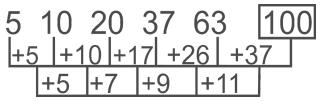


उदाहरण :- 5 ,10, 20, 37, 63 ?

SSC CHSL 14/08/2023 (3rd Shift)

(a) 100 (b) 105 (c) 95 (d) 90

हल :-



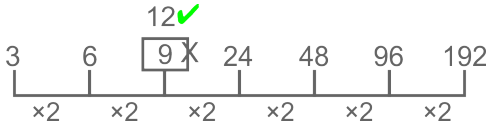
Type - 3

(ग़लत संख्या श्रृंखला)

इस प्रकार में आपको दो संख्या गलत मिलेंगी लेकिन एक को सही करने पर दूसरा अपने आप सही हो जाएगा।

उदाहरण :- 3 , 6 , 9 , 24 , 48 , 96 , 192

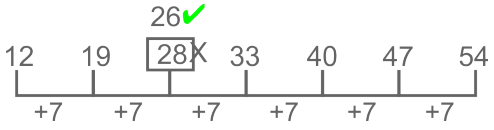
हल :- तर्क → प्रत्येक संख्या पिछली संख्या में 2 से गुना करके निकाली जाती है।



यहाँ, गलत पद 9 है, इसे 12 से प्रतिस्थापित किया जाना चाहिए।

उदाहरण :- 12 , 19 , 28 , 33 , 40 , 47 , 54

हल :- तर्क → प्रत्येक संख्या को 7 से जोड़ा जाता है ।



यहाँ, गलत पद 28 है, इसे 26 से प्रतिस्थापित किया जाना चाहिए।

उदाहरण :- उस संख्या की पहचान करें, जो निम्नलिखित श्रृंखला से संबंधित **नहीं** है।

1.5, 2,3, 6, 18, 108, 1964

SSC MTS 21/07/2022 (Morning)

(a) 108 (b) 6 (c) 18 (d) 1964

हल :- यहाँ, अगली संख्या अंतिम 2 संख्या का गुणनफल है।

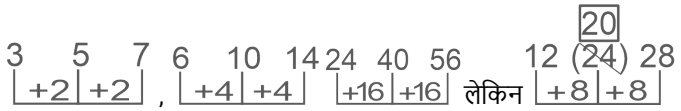
उदाहरण :- दी गई श्रृंखला में एक संख्या गलत है। दिए गए विकल्पों में से गलत संख्या की पहचान करें।

3, 5, 7, 6, 10, 14, 12, 24, 28, 24, 40, 56

SSC CPO 13/12/2019 (Evening)

(a) 28 (b) 24 (c) 12 (d) 10

हल :- यहां 4 अलग-अलग सीरीज दी गई हैं।



उदाहरण :- निम्नलिखित संख्या-श्रृंखला में, दो संख्याओं को कोष्ठक में रखा गया है । इन संख्याओं के लिए, उन्हें श्रृंखला में शामिल करने के संबंध में सर्वाधिक उपयुक्त विकल्प का चयन करें ।

1, 5 , 17, (39) , 65 , 101, (145) , 197

SSC CPO 09/12/2019 (Evening)

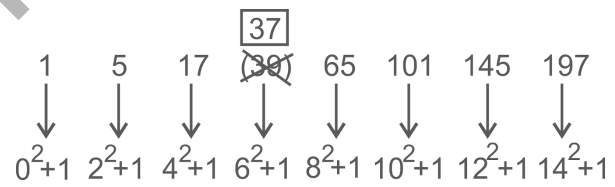
(a) बायीं ओर से कोष्ठक में रखी गयी पहली संख्या सही और बायीं ओर से कोष्ठक में रखी गयी दूसरी संख्या गलत है ।

(b) कोष्ठक में रखी गयी दोनों संख्याएँ गलत हैं ।

(c) कोष्ठक में रखी गयी दोनों संख्याएँ सही हैं ।

(d) बायीं ओर से कोष्ठक में रखी गयी पहली संख्या गलत है तथा कोष्ठक में बायीं ओर से रखी गयी दूसरी संख्या सही है ।

हल :-



तो, 39 गलत है और यह 37 होना चाहिए।

अतः कोष्ठक में पहली संख्या गलत है और दूसरी सही है।

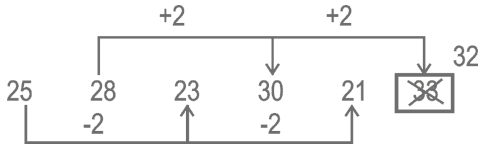
उदाहरण :- उस संख्या को पहचानें जो निम्नलिखित श्रृंखला से संबंधित **नहीं** है।

25, 28, 23, 30, 21, 33

SSC CPO 19/12/2019 (Morning)

(a) 21 (b) 30 (c) 23 (d) 33

हल :-



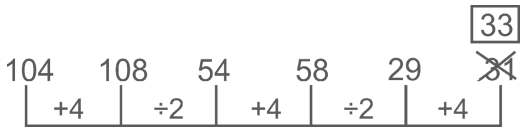
उदाहरण:- उस संख्या को पहचानें जो निम्नलिखित श्रृंखला से संबंधित **नहीं** है।

104 , 108 , 54 , 58 , 29 , 31

SSC CPO 09/12/2019 (Morning)

(a) 29 (b) 54 (c) 58 (d) 31

हल :-



31 के बजाय यहां 33 होना चाहिए।

@apna_gk